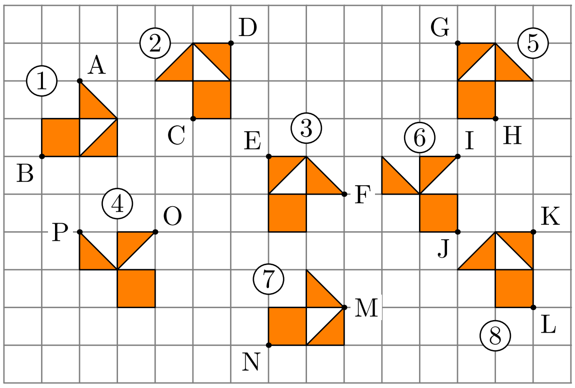
Chpt.2 – Vecteurs et géométrie repérée
Exercices corrigés

Ex. 1



La fig. ① a pour image la fig. ⑦ par la translation de vecteur $\overrightarrow{BN}$.

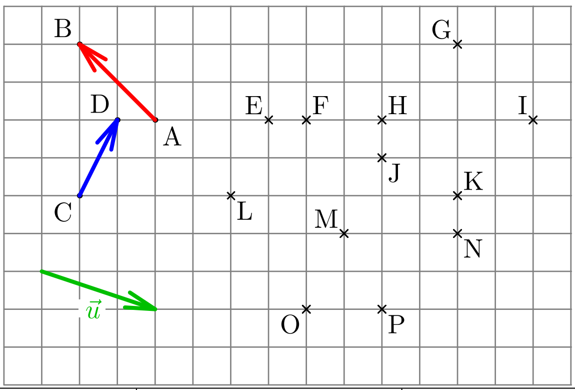
(autre réponse équivalente) La fig. ⑦ a pour image la fig. ① par la translation de vecteur $\overrightarrow{NB}$.

La fig. ② a pour image la fig. ⑧ par la translation de vecteur $\overrightarrow{DK}$.

La fig. ③ a pour image la fig. ⑤ par la translation de vecteur $\overrightarrow{EG}$.

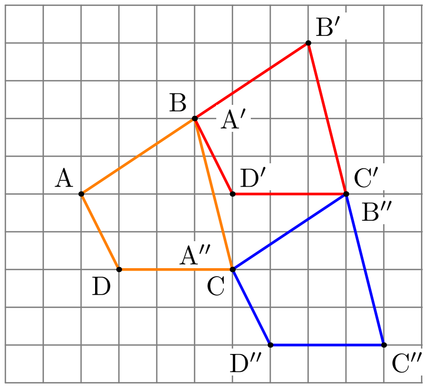
La fig. ④ a pour image la fig. ⑥ par la translation de vecteur $\overrightarrow{OI}$.

Ex. 2 Observer la figure ci-dessous, puis reproduire et compléter le tableau suivant.

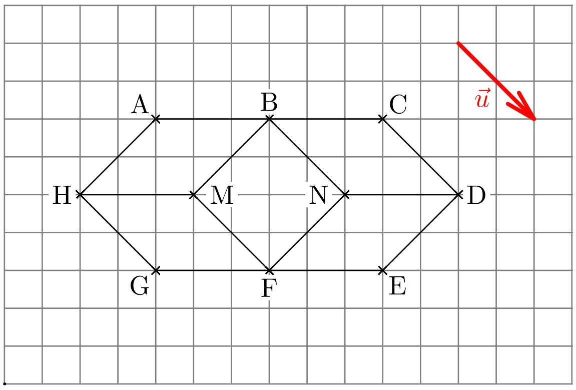


L'image du point...	par la translation de vecteur...	est le point...
N	$\overrightarrow{AB}$	J
L	$\overrightarrow{CD}$	E
L	$\vec{u}$	M
I	$\overrightarrow{AB}$	G
M	$\overrightarrow{CD}$	J
E	$\vec{u}$	J
O	$\overrightarrow{CD}$	M
K	$\overrightarrow{AB}$	H

Ex. 3 On trace en rouge l'image de ABCD par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et en bleu l'image de ABCD par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.



Ex. 4



a) BM = MF : Vrai *b)* $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MF}$: Faux

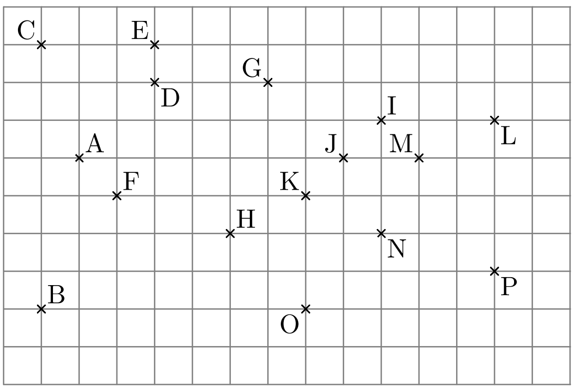
c) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$: Vrai

d) $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{MF} = \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{CD} = \vec{u}$: Vrai

e) $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FE}$: Faux *f)* $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{BM}$: Faux

g) $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AH}$: Vrai

Ex. 5 On considère la figure ci-dessous.



a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{JO}$.

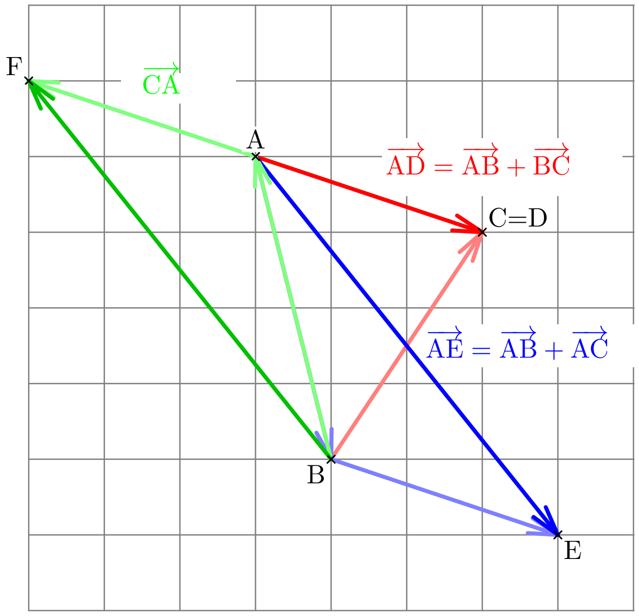
b) $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{GI} = \overrightarrow{FH} = \overrightarrow{NP}$.

c) $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{GE} = \overrightarrow{IG} = \overrightarrow{HF} = \overrightarrow{PN}$.

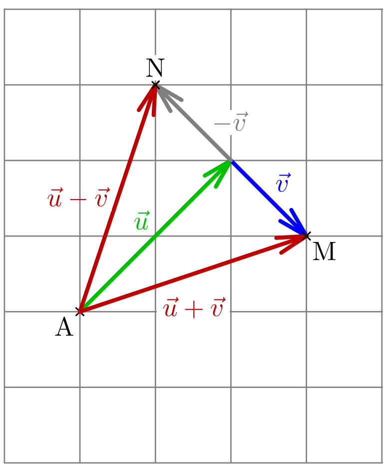
Ex. 6 S'aider d'une figure où on trace un parallélogramme ABDC, puis placer E sur le cercle de centre D et de rayon DC.

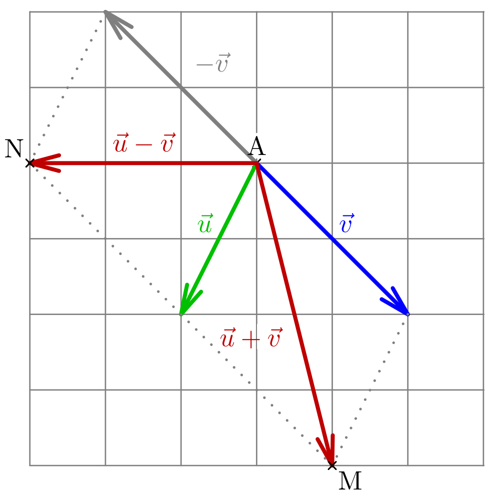
a) $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$ *b)* $ED = BA$
c) $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CA}$ *d)* $\overrightarrow{BB} = \overrightarrow{EE}$
e) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{DC}$ *f)* $-\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$

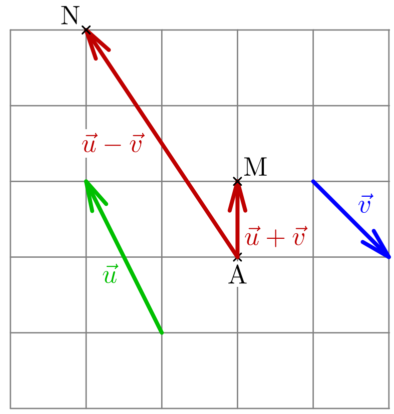
Ex. 7

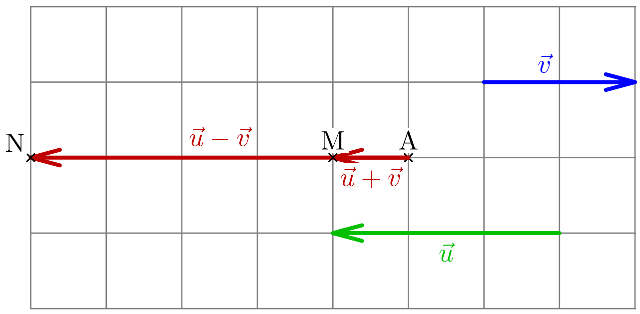


Ex. 8

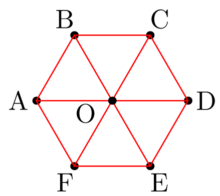








Ex. 9

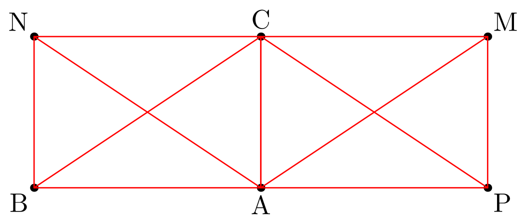


a) $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{CD}$

b)

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OF} &= \overrightarrow{AF} \\
\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{DE} &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{AF} \\
\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BA} &= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CO} = \vec{0} \\
\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{DO} &= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} \\
\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FE} &= \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{FO} \\
\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{OE} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OE} \\
&= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OE} \\
&= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} \\
&= \overrightarrow{AD}
\end{aligned}$$

Ex. 10



a) $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$ *b)* $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{MN}$
c) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BP}$ *d)* $\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BM}$
e) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ *f)* $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{NC}$
g) $\overrightarrow{NA} - \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{MP}$

Ex. 11

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ *b)* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB}$

c) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NB}$

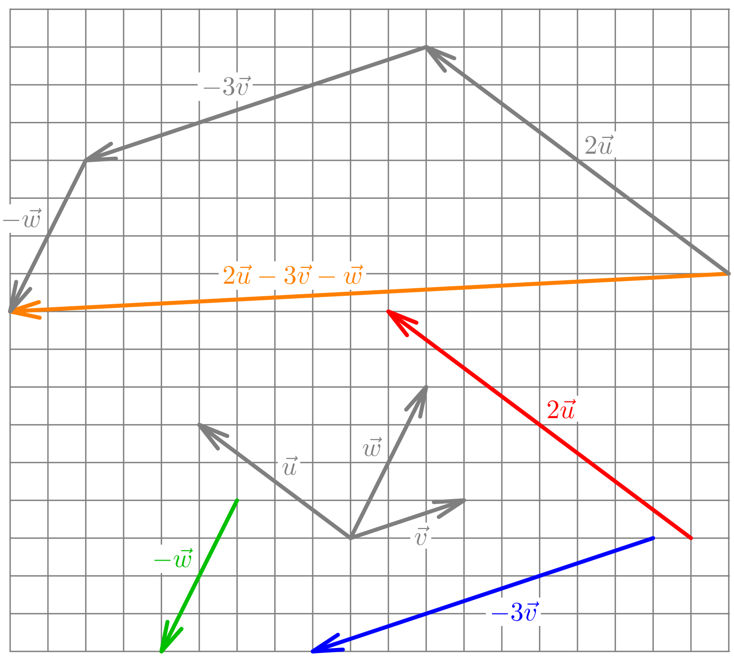
d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$

Ex. 12

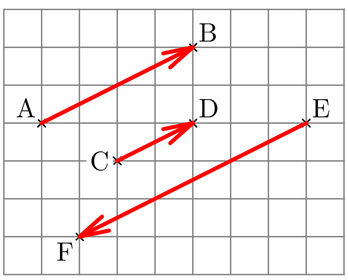
$$\vec{u} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BC}$$

Ex. 13



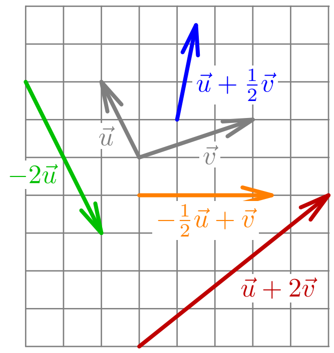
Ex. 14



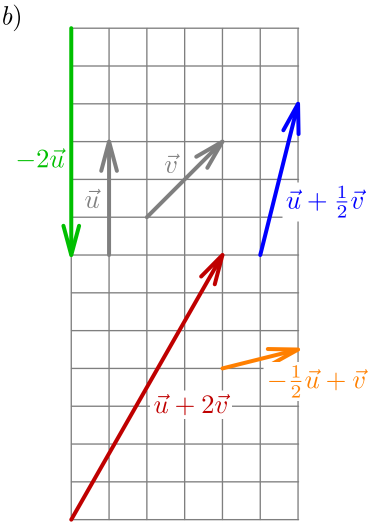
$$\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{EF} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$$

Ex. 15

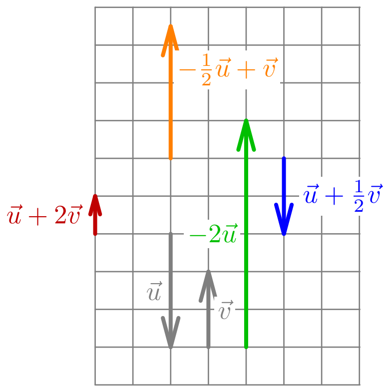
a)



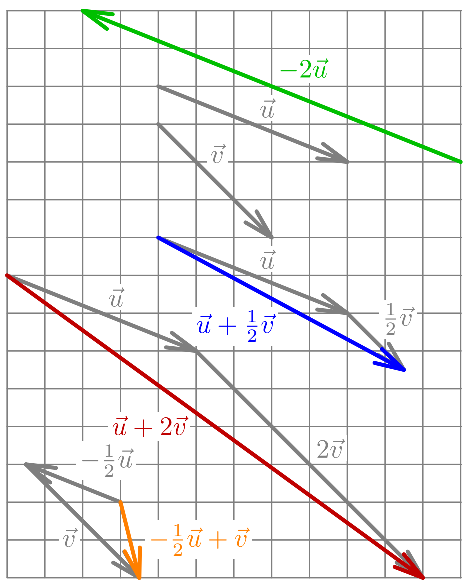
b)



c)

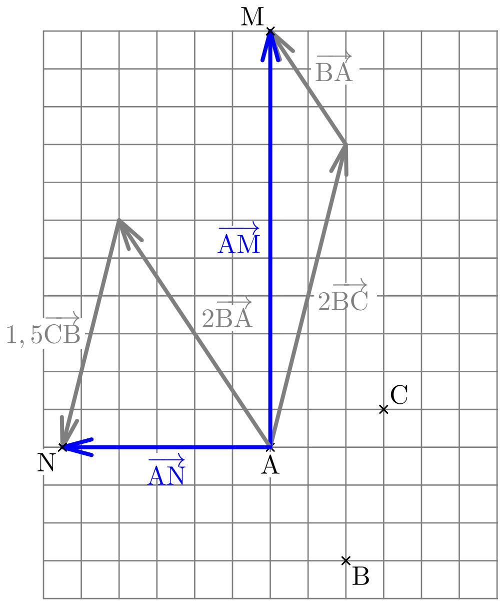


d)



Ex. 16

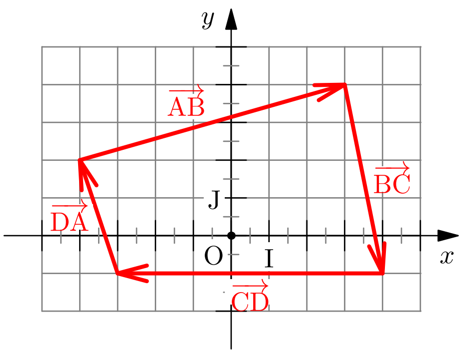
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{AM}} &= 3\overrightarrow{\mathrm{BC}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}} \\
&= 3\overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{CA}} \\
&= 2\overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{CA}} \\
&= 2\overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{BA}} \\
\overrightarrow{\mathrm{AN}} &= -2\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}} \\
&= 2\overrightarrow{\mathrm{BA}} + \frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{CB}}
\end{aligned}$$



Ex. 17

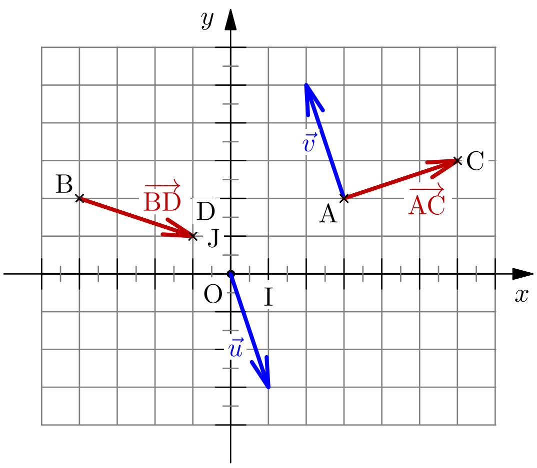
a) $\vec{u}_1(3;3)$ *b)* $\vec{u}_2(2;-1)$
c) $\vec{u}_3(-1;-3)$ *d)* $\vec{u}_4(2;-3)$ *e)* $\vec{u}_5(3;1)$

Ex. 18



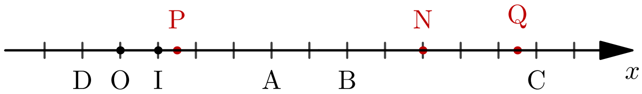
a) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}(7;2)$ *b)* $\overrightarrow{\mathrm{BC}}(1;-5)$
c) $\overrightarrow{\mathrm{CD}}(-7;0)$ *d)* $\overrightarrow{\mathrm{DA}}(-1;3)$

Ex. 19



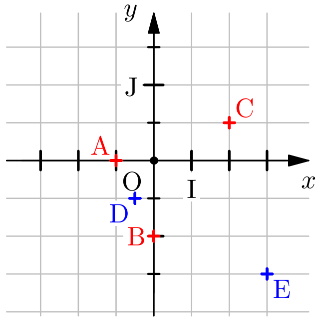
Ex. 20

1. A (4), B (6), C (11) et D (−1)
2. M (5)



Ex. 21

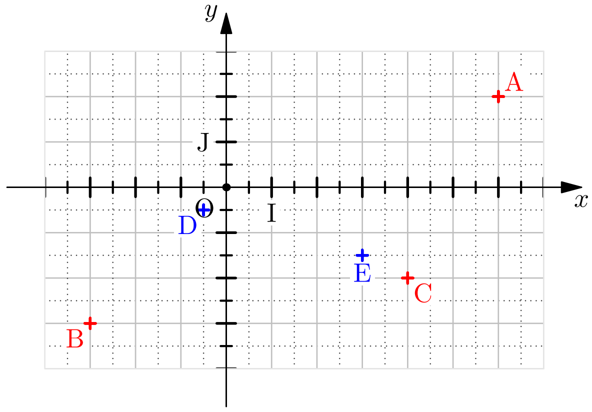
1. A (−1; 0), B (−1; 0) et C (2; 0, 5).
2.

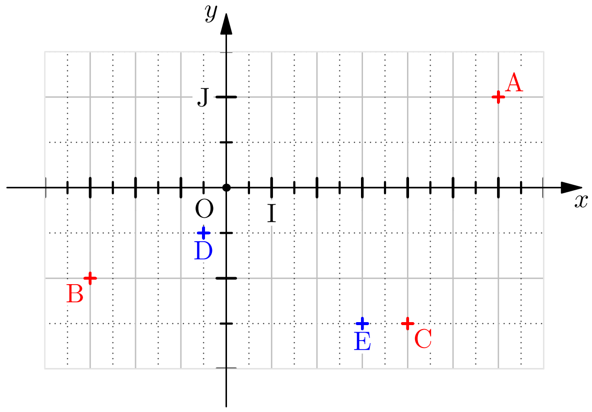


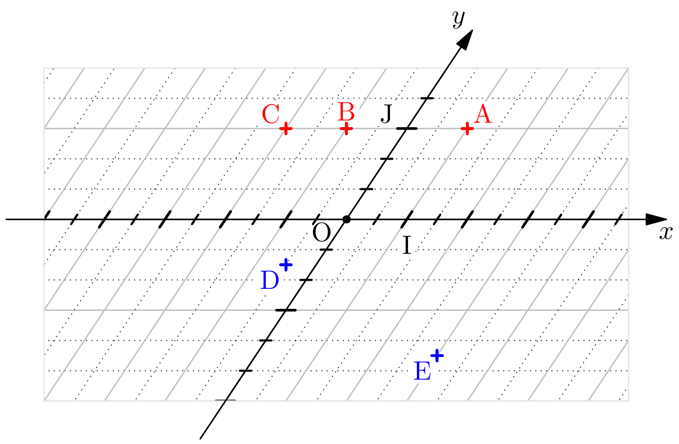
Ex. 22

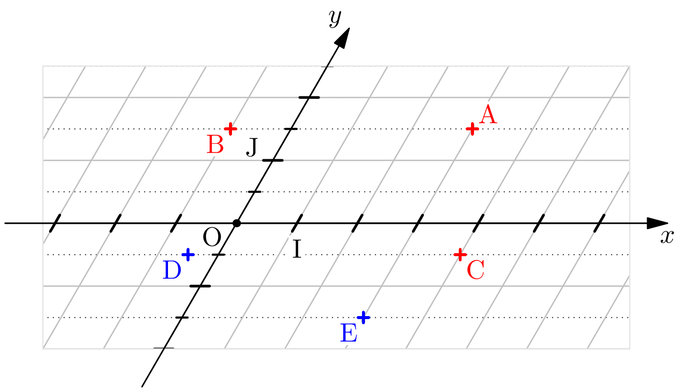
1. Les coordonnées de A, B C dans chaque repère, du repère le plus en haut au repère situé en bas, sont :

A $(6;\ 2)$	B $(-3;\ -3)$	C $(4;\ -2)$
A $(6;\ 1)$	B $(-3;\ -1)$	C $(4;\ -1,5)$
A $(1;\ 1)$	B $(-1;\ 1)$	C $(-2;\ 1)$
A $(4;\ 1,5)$	B $(-1;\ 1,5)$	C $(4;\ -0,5)$









Ex. 23

1. *b)* $(3;\ 0)$
2. *b)* C et J
3. *a)* $(1;\ -1)$
4. *a)* une abscisse égale à 2 ;

Ex. 24 Pour chaque question on note K le milieu de [AB]. On trouve (calculs à détailler en DS) :

1. $\mathrm{K}\,(-2;\ 7)$
2. $\mathrm{K}\left(-3;\ -\frac{7}{2}\right)$
3. $\mathrm{K}\left(\frac{1}{8};\ \frac{13}{6}\right)$

Ex. 25

1. On note K, L les milieux de [AC] et [BD] respectivement. On trouve (calculs à détailler en DS) :

   a) $\mathrm{K}\,(1;\ 2)$, $\mathrm{L}\,(1;\ 2)$, donc $\mathrm{K} = \mathrm{L}$, donc les diagonales de ABCD se coupent en leur milieu, donc ABCD est un parallélogramme.

   b) $\mathrm{K}\left(2;\ -\frac{1}{2}\right)$, $\mathrm{L}\left(2;\ -\frac{1}{2}\right)$, donc $\mathrm{K} = \mathrm{L}$, donc les diagonales de ABCD se coupent en leur milieu, donc ABCD est un parallélogramme.

   c) $\mathrm{K}\left(-\frac{3}{2};\ \frac{1}{2}\right)$, $\mathrm{L}\left(\frac{3}{2};\ -\frac{1}{2}\right)$, $x_{\mathrm{K}} = -\frac{3}{2} \neq \frac{3}{2} = x_{\mathrm{L}}$ donc $\mathrm{K} \neq \mathrm{L}$, donc les diagonales de ABCD ne se coupent pas en leur milieu, donc ABCD n'est pas un parallélogramme.

2. *a)* $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,(-4;\ 3)$, $\overrightarrow{\mathrm{DC}}\,(-4;\ 3)$, donc $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{DC}}$ donc ABCD est un parallélogramme.

   b) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,(5;\ 1)$, $\overrightarrow{\mathrm{DC}}\,(5;\ 1)$, donc $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{DC}}$ donc ABCD est un parallélogramme.

   c) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,(3;\ -1)$, $\overrightarrow{\mathrm{DC}}\,(-3;\ 1)$, donc $x_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}} = 3 \neq -3 = x_{\overrightarrow{\mathrm{DC}}}$ donc $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \neq \overrightarrow{\mathrm{DC}}$ donc ABCD n'est pas un parallélogramme.

Ex. 26 Le point C est symétrique du point A par rapport au point B si et seulement si B est le milieu de [AC]. Notons K le milieu de [AC]. On obtient (calculs à détailler en DS)

1. $\mathrm{K}\left(4;\ \frac{7}{2}\right)$, $y_{\mathrm{K}} = \frac{7}{2} \neq 3 = y_{\mathrm{B}}$, donc $\mathrm{K} \neq \mathrm{B}$ donc C n'est pas le symétrique de A par rapport à B.
2. $\mathrm{K}\left(-4;\ \frac{7}{2}\right)$, $x_{\mathrm{K}} = -4 \neq 2 = x_{\mathrm{B}}$, donc $\mathrm{K} \neq \mathrm{B}$ donc C n'est pas le symétrique de A par rapport à B.
3. $\mathrm{K}\,(1;\ 4)$, donc $\mathrm{K} = \mathrm{B}$ donc C est le symétrique de A par rapport à B.

Ex. 27 (les calculs sont à détailler en DS)
Première méthode : le point B est le milieu de [AC] si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$. Or $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,(-3;\ 1)$ et $\overrightarrow{\mathrm{BC}}\,(x_{\mathrm{C}} + 1;\ y_{\mathrm{C}} - 2)$. Donc B est milieu de [AC] si et seulement si

$$\begin{cases} x_{\mathrm{C}} + 1 = -3 \\ y_{\mathrm{C}} - 2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{\mathrm{C}} = -4 \\ y_{\mathrm{C}} = 3 \end{cases}$$

donc $\mathrm{C}\,(-4;\ 3)$.

Autre méthode : le point B est le milieu de [AC] si et seulement si

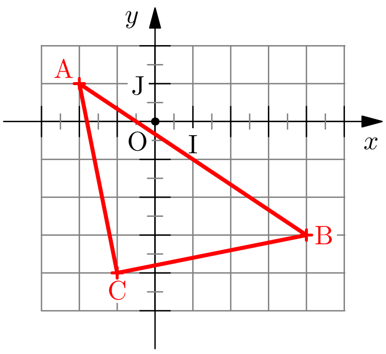
$$\begin{cases} x_{\mathrm{B}} = \dfrac{x_{\mathrm{A}} + x_{\mathrm{C}}}{2} \\ y_{\mathrm{B}} = \dfrac{y_{\mathrm{A}} + y_{\mathrm{C}}}{2} \end{cases}$$
$$\begin{cases} -1 = \dfrac{2 + x_{\mathrm{C}}}{2} \\ 2 = \dfrac{1 + y_{\mathrm{C}}}{2} \end{cases}$$
$$\begin{cases} -2 = 2 + x_{\mathrm{C}} \\ 4 = 1 + y_{\mathrm{C}} \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_{\mathrm{C}} = -4 \\ y_{\mathrm{C}} = 3 \end{cases}$$

donc C $(-4; 3)$.

Ex. 28 (Calculs à détailler en DS)

1. $\mathrm{AB} = \sqrt{41}$
2. $\mathrm{AB} = \sqrt{146}$

Ex. 29 (Calculs à détailler en DS)

1. 

2. *a*) On conjecture que le triangle ABC est rectangle et isocèle en C.

   b) $\mathrm{AB} = 2\sqrt{13}$, $\mathrm{AC} = \sqrt{26}$ et $\mathrm{BC} = \sqrt{26}$.

   c) D'après 2.*b*), CA = CB donc ABC est isocèle en C.

   D'autre part, toujours d'après 2.*b*), $\mathrm{CA}^2 + \mathrm{CB}^2 = 26 + 26 = 52$ et $\mathrm{AB}^2 = 52$, donc $\mathrm{CA}^2 + \mathrm{CB}^2 = \mathrm{AB}^2$.

   Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est rectangle en C.

   Donc ABC est rectangle et isocèle en C.

Ex. 30 (Calculs à détailler en DS)

1. $\mathrm{AB} = \sqrt{17}$, $\mathrm{BC} = \sqrt{17}$, $\mathrm{CA} = \sqrt{34}$.

   On a AB = BC donc ABC est isocèle en B.

   Par ailleurs, $\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 = 17 + 17 = 34$ et $\mathrm{AC}^2 = 34$, donc $\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 = \mathrm{AC}^2$.

   Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, ABC est rectangle en B.

   Donc ABC est rectangle et isocèle en B.

2. $\mathrm{AB} = \sqrt{13}$, $\mathrm{BC} = 5\sqrt{2}$, $\mathrm{CA} = \sqrt{13}$.

   On a AB = AC donc ABC est isocèle en A.

   Remarque :

   $\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 = 26 \neq 25 = \mathrm{BC}^2$.

   Donc, d'après la *contraposée* du théorème de Pythagore, ABC n'est pas rectangle en B.

3. $\mathrm{AB} = \sqrt{145}$, $\mathrm{BC} = 5\sqrt{6}$, $\mathrm{CA} = 2\sqrt{5}$.

   Donc $\mathrm{AB} \neq \mathrm{BC}$, $\mathrm{BC} \neq \mathrm{CA}$ et $\mathrm{AB} \neq \mathrm{AC}$: le triangle ABC est quelconque (un triangle dont les côtés sont de longueur 2 à 2 différentes est aussi appelé *scalène*).

Ex. 31 (Calculs à détailler en DS).
On a DE = 6, EF = 6 et FD = 6.
Puisque DE = EF = FD, le triangle DEF est équilatéral.

Ex. 32 (Calculs à détailler en DS)

1. On $\mathrm{AB} = \sqrt{25} = 5$ donc le point B appartient au cercle de centre A et de rayon 5 : affirmation vraie.
2. $\mathrm{AC} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ donc l'affirmation est vraie.
3. Pour savoir si ABCD est un carré, on détermine d'abord si c'est un parallélogramme.

   $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,(-4; 3)$ et $\overrightarrow{\mathrm{DC}}\,(-4; 3)$.

   Donc $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{DC}}$, donc ABCD est un parallélogramme.

   On a $\mathrm{BC} = \sqrt{25} = 5$.

   Or on a vu que AB = 5, Donc AB = BC, donc le parallélogramme ABCD (ayant deux côtés adjacents de même longueur) est un losange.

   On a $\mathrm{BD} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

   Or on a vu que $\mathrm{AC} = 5\sqrt{2}$, donc AC = BD, donc le losange ABCD (ayant des diagonales de même longueur) est un (rectangle donc un) carré. Donc l'affirmation est vraie.
4. On a $\mathrm{EA} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$ et $\mathrm{EB} = \sqrt{53}$, donc $\mathrm{EA} \neq \mathrm{EB}$, donc le point E n'appartient pas à la médiatrice du segment [AB]. L'affirmation est fausse.

Ex. 33 (Calculs à détailler en DS)

1. I $(6; 0)$
2. *a*) Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme si et seulement si I, milieu de la diagonale [AC] est aussi milieu de [BD], donc si et seulement si

$$\begin{cases} x_{\mathrm{I}} = \dfrac{x_{\mathrm{B}} + x_{\mathrm{D}}}{2} \\ y_{\mathrm{I}} = \dfrac{y_{\mathrm{B}} + y_{\mathrm{D}}}{2} \end{cases}$$
$$\begin{cases} 6 = \dfrac{7 + x_{\mathrm{D}}}{2} \\ 0 = \dfrac{2 + y_{\mathrm{D}}}{2} \end{cases}$$
$$\begin{cases} \dfrac{x_{\mathrm{D}} + 7}{2} = 6 \\ \dfrac{y_{\mathrm{D}} + 2}{2} = 0 \end{cases}$$

   b) On résout

$$\begin{cases} \dfrac{x_{\mathrm{D}} + 7}{2} = 6 \\ \dfrac{y_{\mathrm{D}} + 2}{2} = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_{\mathrm{D}} + 7 = 12 \\ y_{\mathrm{D}} + 2 = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_{\mathrm{D}} = 5 \\ y_{\mathrm{D}} = -2 \end{cases}$$

   Donc D $(5; -2)$.

Ex. 34 (Calculs à détailler en DS)

1. *a*) Je note K le milieu de [AC]. On obtient $K\left(\frac{9}{2};\ -\frac{1}{2}\right)$.

   b) Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme si et seulement si K est le milieu de [BD], donc si et seulement si

$$\begin{cases} x_K = \dfrac{x_D + x_B}{2} \\ y_K = \dfrac{y_D + y_B}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{9}{2} = \dfrac{x_D + 4}{2} \\ -\dfrac{1}{2} = \dfrac{y_D - 3}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9 = x_D + 4 \\ -1 = y_D - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_D = 5 \\ y_D = 2 \end{cases}$$

   Donc $D\,(5;\ 2)$.

2. Calculons BD etAC.
   $BD = \sqrt{26}$ et $AC = \sqrt{26}$.
   Donc $AC = BD$.
   Donc le parallélogramme ABCD (ayant des diagonales de même longueur) est un rectangle.
   Calculons AB et BC.
   $AB = 2\sqrt{2}$ et $BC = 3\sqrt{2}$.
   Donc $\mathscr{A}(ABC) = AB \times BC = 12$ u.a.

Ex. 35

1. Le point E est le symétrique de D par rapport à C donc $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{DC}$.
   Or $\overrightarrow{CE}\,(x_E - 8;\ y_E - 2)$ et $\overrightarrow{DC}\,(4;\ 2)$.
   Donc

$$\begin{cases} x_E - 8 = 4 \\ y_E - 2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_E = 12 \\ y_E = 4 \end{cases}$$

   donc $E\,(12;\ 4)$.
   De la même façon, F est le symétrique de B par rapport à A donc $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BA}$.
   Or $\overrightarrow{AF}\,(x_F - 1;\ y_F - 3)$ et $\overrightarrow{BA}\,(-4;\ -2)$.
   Donc

$$\begin{cases} x_F - 1 = -4 \\ y_F - 3 = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_F = -3 \\ y_F = 1 \end{cases}$$

   donc $F\,(-3;\ 1)$.

2. On a $\overrightarrow{AB}\,(4;\ 2)$ et $\overrightarrow{DC}\,(4;\ 2)$.
   Donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, donc ABCD est parallélogramme.

   On sait que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ car ABCD est un parallélogramme.
   De plus $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CE}$, car E est le symétrique de D par rapport à C.
   Donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}$, donc ABEC est un parallélogramme.

   On sait que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ car ABCD est un parallélogramme.
   De plus $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{AB}$, car F est le symétrique de B par rapport à A.
   Donc $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{FA}$, donc ACDF est un parallélogramme.

   On sait que $\overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{DC}$ car E est le symétrique de D par rapport à C.
   On sait que $\overrightarrow{FB} = 2\overrightarrow{AB}$ car F est le symétrique de B par rapport à A.
   Or $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ car ABCD est un parallélogramme.
   Donc $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{FB}$, donc BEDF est un parallélogramme.

Ex. 36

Traduisons les définitions géométriques du point D :

① est vrai si et seulement si B est le milieu de [AD] : système d'équations *d*)

② est vrai si et seulement si A est le milieu de [BD] : système d'équations *b*)

③ est vrai si et seulement si le milieu de [BD] coincide avec le milieu de [AC] : système d'équations *a*)

④ est vrai si et seulement si le milieu de [AD] coincide avec le milieu de [BC] : système d'équations *c*)

Résolvons les systèmes proposés :

a)

$$\begin{cases} \dfrac{x_B + x_D}{2} = \dfrac{x_A + x_C}{2} \\ \dfrac{y_B + y_D}{2} = \dfrac{y_A + y_C}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5 + x_D = 1 \\ -2 + y_D = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_D = -4 \\ y_D = 2 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} \dfrac{x_B + x_D}{2} = x_A \\ \dfrac{y_B + y_D}{2} = y_A \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5 + x_D = 4 \\ -2 + y_D = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_D = -1 \\ y_D = 8 \end{cases}$$

donc le système *a*) est associé aux coordonnées β) et *b*) est associé à δ).

c)

$$\begin{cases} \dfrac{x_A + x_D}{2} = \dfrac{x_B + x_C}{2} \\ \dfrac{y_A + y_D}{2} = \dfrac{y_B + y_C}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 + x_D = 4 \\ 3 + y_D = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_D = 2 \\ y_D = -8 \end{cases}$$

d)

$$\begin{cases} \dfrac{x_A + x_D}{2} = x_B \\ \dfrac{y_A + y_D}{2} = y_B \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 + x_D = 10 \\ 3 + y_D = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_D = 8 \\ y_D = -7 \end{cases}$$

donc le système *c*) est associé aux coordonnées γ) et *d*) est associé à α).
En résumé les associations correctes sont :

① *d*) α)

② *b*) δ)

③ *a*) β)

④ *c*) γ)

Ex. 37 (Calculs à détailler en DS)

1. $\overrightarrow{AB}(3;\,6)$ et $\overrightarrow{DC}(3;\,6)$, donc $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, donc ABCD est parallélogramme.
   $AB=3\sqrt{5}$ et $BC=3\sqrt{5}$, donc le parallélogramme ABCD (ayant deux côtés adjacents de même longueur) est un losange.
   $AC=3\sqrt{10}$ et $BD=3\sqrt{10}$, donc $AC=BD$, donc le losange ABCD (ayant deux diagonales de même longueur) est un (rectangle donc un) carré.
2. $\mathscr{A}(ABCD)=AB^2=45$ u.a..

Ex. 38 (Calculs à détailler en DS)
Figure de gauche :

(BD) et (EC) sont sécantes en A
(DE) et (BC) sont parallèles
Donc, d'après le théorème de Thalès,

$$\begin{aligned}\frac{AE}{AC}&=\frac{DE}{BC}\\ \frac{3}{4}&=\frac{x}{5}\\ x&=\frac{15}{4}(=3,75\text{ cm})\end{aligned}$$

Figure de droite :

(BD) et (EC) sont sécantes en A
(DE) et (BC) sont parallèles
Donc, d'après le théorème de Thalès,

$$\begin{aligned}\frac{AD}{AB}&=\frac{ED}{BC}\\ \frac{x}{2,5}&=\frac{1,5}{3}\\ x&=\frac{1,5\times 2,5}{3}(=1,25\text{ cm})\end{aligned}$$

Ex. 39 (Calculs à détailler en DS)
Figure de gauche :

ABC est rectangle en A.
Donc, d'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned}AB^2+AC^2&=BC^2\\ 25+x^2&=49\\ x^2&=24\\ x&=\sqrt{24} && \text{car } x\geqslant 0\text{, puisque c'est une longueur}\\ x&=2\sqrt{6}\simeq 4,9\text{ cm.}\end{aligned}$$

Figure de droite :

ABC est rectangle en B.
Donc, d'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned}AB^2+BC^2&=AC^2\\ 4+9&=x^2\\ x^2&=13\\ x&=\sqrt{13} && \text{car } x\geqslant 0\text{, puisque c'est une longueur}\\ x&\simeq 3,6\text{ cm.}\end{aligned}$$

Ex. 40 (Calculs à détailler en DS)
Figure de gauche :

Puisque le centre O du cercle est sur [AB], où A et B sont sur le cercle, [AB] est un diamètre du cercle.
Donc [AB] est un diamètre du cercle circonscrit au triangle ABC.
Donc ABC est rectangle en C.
Donc $\sin\left(\widehat{ABC}\right)=\frac{AC}{AB}=\frac{x}{8}$. Donc

$$\begin{aligned}x&=8\times\sin\left(\widehat{ABC}\right)\\ &=8\times\sin(30°)\\ &=8\times\frac{1}{2}\\ &=4\text{ cm.}\end{aligned}$$

Figure de droite :

ABC est rectangle en B.
Donc $\tan\left(\widehat{ACB}\right)=\frac{AB}{BC}=\frac{x}{3}$. Donc

$$\begin{aligned}x&=3\times\tan\left(\widehat{ABC}\right)\\ &=3\times\tan(45°)\\ &=3\text{ cm.}\end{aligned}$$

Autre méthode :

ABC est rectangle en B avec $\widehat{ACB}=45°$.
Donc $\widehat{BAC}=180-\widehat{ABC}-\widehat{BCA}=45°=\widehat{ACB}$.
Donc ABC est rectangle et isocèle en B.
Donc $x=AB=BC=3$ cm.

Ex. 41
Figure de gauche :

La somme des angles d'un triangle vaut 180°.
donc $\alpha=\widehat{BAC}=180-\widehat{ABC}-\widehat{BCA}=180-(60+40)=80°$.

Figure de droite :

Les droites d et d' sont parallèles et (AB) et d sont sécantes.
Donc les angles α et $\widehat{ABd'}$ sont alterne-internes, donc de même mesure.
Donc $\alpha=60°$.

Ex. 42 Le triangle ABC est rectangle en B donc $\sin\left(\widehat{ACB}\right)=\frac{AB}{AC}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$.
Donc $\widehat{ACB}=\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)=30°$.

Ex. 43
Figure de gauche :

[AB] est une corde du cercle de centre O
C est sur le cercle de centre O et est situé du même côté de (AB) que O.
Donc, d'après le théorème de l'angle inscrit

$$\alpha=\widehat{AOB}=2\widehat{ACB}=2\times 22,5=45°.$$

Figure de droite :

[CB] est une corde du cercle de centre O
D est sur le cercle de centre O et est situé du même côté de (CB) que O.
Donc, d'après le théorème de l'angle inscrit

$$\alpha=\widehat{BDC}=\frac{1}{2}\widehat{BOC}=\frac{1}{2}\times 50=25°.$$

Ex. 44

Remarque : il est indispensable dans cet exercice de s'aider d'une figure pour avoir l'intuition des écritures vectorielles permettant de trouver la relation demandée.

1.
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JC} \\
&= \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{AJ} \qquad \text{car } I \text{ est milieu de [AB]} \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{et } J \text{ est milieu de [AC]} \\
&= \left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ}\right) + \overrightarrow{IJ} \\
&= \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{IJ} \\
&= 2\overrightarrow{IJ}.
\end{aligned}$$

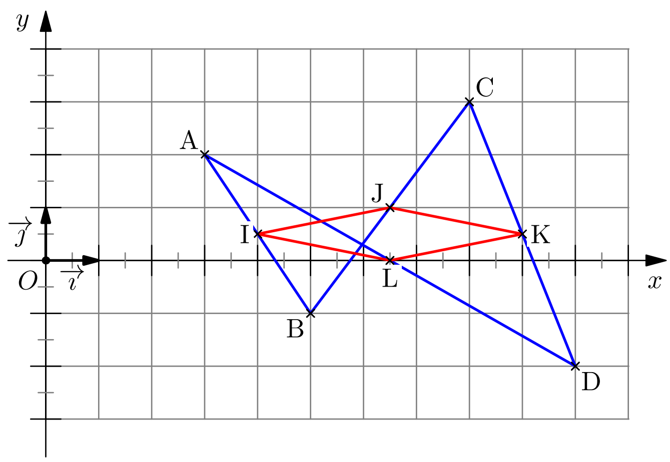
2. il s'agit du *théorème des milieux* : «Dans un triangle, le segment joignant les milieux de deux côtés est parallèle au troisième côté et a pour longueur la moitié de ce troisième côté».
   En effet, puisque $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{IJ}$:

   $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{IJ}$ ont même direction, donc (BC) et (IJ) sont parallèles et le segment joignant les milieux est parallèle au troisième côté ;

   BC $= \frac{1}{2}$IJ et la longueur du segment joignant les milieux des côtés est égale à la moitié de celle du troisième côté.

Remarque : ce théorème est un cas particulier du théorème de Thalès.

Ex. 45 (Calculs à détailler en DS)



1. Cf. ci-dessus.
2. *a*) Cf. ci-dessus.

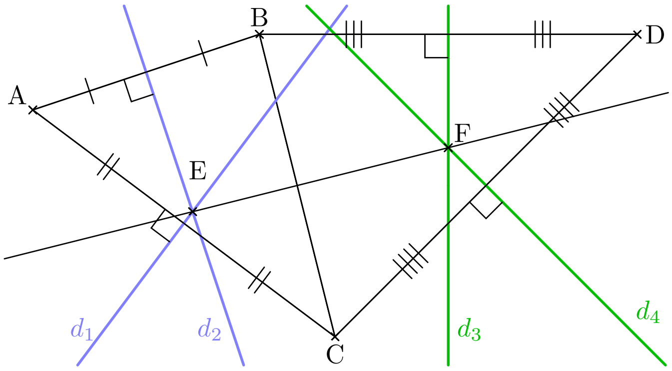
   b) On conjecture que IJKL est un losange.
3. *a*) I (4; 0,5), J (6,5; 1), K (9; 0,5) et K (6,5; 0).

   b) $\overrightarrow{IJ}$ (2,5; 0,5) et $\overrightarrow{LK}$ (2,5; 0,5). Donc $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$, donc IJKL est un parallélogramme.

   IJ $= \sqrt{\frac{13}{2}}$ et JK $= \sqrt{\frac{13}{2}}$.

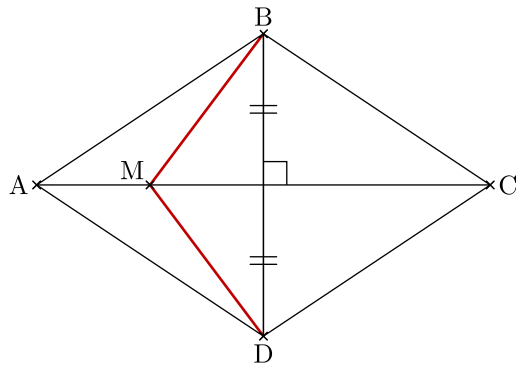
   Donc IJ = JK, donc le parallélogramme IJKL (ayant deux côtés adjacents de même longueur) est un losange.

Ex. 46



1. Cf. figure ci-dessus.
2. $E \in d_1$, médiatrice de [AC], donc EA = EC.
   $E \in d_2$, médiatrice de [AB], donc EA = EB.
   Donc EC = EB.
   Donc E est sur la médiatrice de [BC].
3. $F \in d_3$, médiatrice de [BD], donc FB = FD.
   $F \in d_4$, médiatrice de [CD], donc FC = FD.
   Donc FC = FB.
   Donc F est sur la médiatrice de [BC].
4. Puisque E et F sont sur la médiatrice [BC], si on suppose que E $\neq$ F, alors (EF) est la médiatrice de [BC], donc (EF) et (BC) sont perpendiculaires. On peut remarquer qu'on aura $E = F$ si ABC et BCD sont rectangles en A et D respectivement.

Ex. 47



1. Cf. ci-dessus.
2. [AC] et [BD] se coupent en leur milieu, car ABCD est un losange, donc un parallélogramme.
   (AC) et (BD) sont perpendiculaires, car ABCD est un losange, donc ses diagonales se coupent perpendiculairement.
   Donc (AC) coupe [BD] en son milieu et perpendiculairement.
   Donc (AC) est la médiatrice de [BD].
   Or M $\in$ [AC], donc $M \in$ (AC), donc MB = MD.