Chpt.5 – Résolutions algébriques d'équations et d'inéquations
Exercices corrigés

Les solutions données ci-dessous ne sont, la plupart du temps, pas détaillées et on ne donne que les étapes essentielles. Une rédaction correcte suppose des calculs détaillés.

Ex. 1

a) On remarque qu'il s'agit d'une équation du premier degré en x. Solution : $7(2x+4)-8x=15x+1$ sur $\mathbb{R}$ ssi $x=3$

b) On remarque qu'il s'agit d'une équation du premier degré en x. Solution : $3(2-4x)=4(x-1)+2$ sur $\mathbb{R}$ ssi $x=\frac{1}{2}$

c) On remarque, après simplification, qu'il s'agit d'une équation du premier degré en x. Solution : $(2x+3)(x+1)=4-x(3-2x)$ sur $\mathbb{R}$ ssi $x=\frac{1}{8}$.

d) On remarque, après simplification, qu'il s'agit d'une équation du premier degré en z. Solution : $4z^2+12z+9=(2z+1)^2$ ssi $z=-1$.

Ex. 2 On remarque que pour toutes les questions il s'agit d'une équation produit nul. Pour chacune on donne la phrase de conclusion.

a) $(2-4x)(3+x)=0$ sur $\mathbb{R}$ ssi $x\in\left\{\frac{1}{2};-3\right\}$.

b) $(5x+1)(2x-3)=0$ sur $\mathbb{R}$ ssi $x\in\left\{-\frac{1}{5};\frac{3}{2}\right\}$.

c) $3x(2x+1)=0$ sur $\mathbb{R}$ ssi $x\in\left\{0;-\frac{1}{2}\right\}$.

d) $(x+3)(x-2)(2x+1)=0$ sur $\mathbb{R}$ ssi $x\in\left\{-3;2;-\frac{1}{2}\right\}$.

Pour les questions des trois exercices ci-dessous, on remarque qu'on peut se ramener à une équation produit nul par une factorisation. On donne celle-ci puis la phrase de conclusion.

Ex. 3

a) $(x-6)(x+6)=0$.
Solution : $x^2-36=0$ sur $\mathbb{R}$ ssi $x\in\{-6;6\}$.

b) $(2x-1)(2x+1)=0$.
Solution : $4x^2-1=0$ sur $\mathbb{R}$ ssi $x\in\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\}$.

c) $(5x-10)(5x+10)=0$.
Solution : $25x^2-100=0$ sur $\mathbb{R}$ ssi $x\in\{-2;2\}$.

d) $x(5x-3)=0$.
Solution : $5x^2-3x=0$ sur $\mathbb{R}$ ssi $x\in\{0;\frac{3}{5}\}$.

Ex. 4

a) $(x-2)(2x+5)=0$.
Solution : $(2x+3)(x-2)+2(x-2)=0$ sur $\mathbb{R}$ ssi $x\in\left\{2;-\frac{5}{2}\right\}$.

b) $(5x-3)^2=0$.
Solution : $25x^2-30x+9=0$ sur $\mathbb{R}$ ssi $x\in\left\{\frac{3}{5}\right\}$.

c) $3(x-1)(5x-1)=0$.
Solution : $(3x+1)(5x-1)-4(5x-1)=0$ sur $\mathbb{R}$ ssi $x\in\left\{1;\frac{1}{5}\right\}$.

d) $3(x-2)(3x+8)=0$.
Solution : $(3x+1)^2-49=0$ sur $\mathbb{R}$ ssi $x\in\left\{2;-\frac{8}{3}\right\}$.

Ex. 5

1. $(x-2)(2x-5)=0$.
Solution : $x(2x-5)=2(2x-5)$ sur $\mathbb{R}$ ssi $x\in\left\{2;\frac{5}{2}\right\}$.
2. $(2x-3)(3x+5)=0$.
Solution : $(5x+2)(2x-3)=4x^2-12x+9$ sur $\mathbb{R}$ ssi $x\in\left\{\frac{3}{2};-\frac{5}{3}\right\}$.
3. $3(x-1)(5x-1)=0$.
Solution : $(3x+1)(5x-1)-4(5x-1)=0$ sur $\mathbb{R}$ ssi $x\in\left\{1;\frac{1}{5}\right\}$.
4. $-x(3x+8)=0$.
Solution : $5x^2=8x(x+1)$ sur $\mathbb{R}$ ssi $x\in\left\{0;-\frac{8}{3}\right\}$.
5. $4(x-1)(x+2)=0$.
Solution : $(2x+1)^2=9$ sur $\mathbb{R}$ ssi $x\in\{1;-2\}$.
6. $15(x+1)(x+3)=0$.
Solution : $(4x+7)^2=(x-2)^2$ sur $\mathbb{R}$ ssi $x\in\{-1;-3\}$.
7. $7(x+1)(7x-11)=0$.
Solution : $(7x-2)^2-1=80$ sur $\mathbb{R}$ ssi $x\in\left\{-1;\frac{11}{7}\right\}$.

Ex. 6 Notons x le nombre réel recherché. Alors $2x+5=3x-2$. On trouve : $x=7$. Conclusion : le nombre dont le double augmenté de 5 est égal à son triple diminué de 2 est 7.

Ex. 7 Choisir la forme adaptée (1)

1. Pour tout réel x, $f(x)=2x^2-9x+4$ (forme développée de $f(x)$).
2. Pour tout réel x, $f(x)=(x-4)(2x-1)$ (forme factorisée de $f(x)$).
3. *a)* On calcule $f(0)$, par exemple à l'aide de la forme développée. On trouve $f(0)=4$. Donc les coordonnées du point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des ordonnées sont $(0;4)$.

   b) On résout sur $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=4$, en prenant la forme développée. On obtient l'équation produit nul $x(2x-9)=0$, à résoudre sur $\mathbb{R}$. Conclusion : les antécédents de 4 par f sont 0 et $\frac{9}{2}$.

   c) On calcule $f(4)$ en utilisant la forme factorisée. Solution : $f(4)=0$.

   d) Pour résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=0$ on prend la forme factorisée, ce qui donne l'équation produit nul $(x-4)(2x-1)=0$ à résoudre sur $\mathbb{R}$. Solution : $f(x)=0$ sur $\mathbb{R}$ ssi $x\in\left\{4;\frac{1}{2}\right\}$.

Ex. 8 Choisir la forme adaptée (2)

1. Pour tout réel x, $f(x) = 9x^2 - 6x - 8$ (forme développée de $f(x)$).
2. Pour tout réel x, $f(x) = (3x-4)(3x+2)$ (forme factorisée de $f(x)$).
3. *a*) On calcule $f(-2)$ à l'aide de la forme initiale de $f(x)$ (par exemple). On trouve $f(-2) = 40$.

   b) On résout sur $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = -9$, à l'aide de la forme initiale de $f(x)$. On obtient l'équation produit nul $(3x-1)^2 = 0$. Solution : l'antécédent de -9 par f est $\frac{1}{3}$.

   c) On calcule $f(3)$, à l'aide par exemple de la forme initiale de $f(x)$. On trouve $f(3) = 55$. Solution : l'ordonnée du point d'abscisse 3 de $\mathscr{C}_f$ est 55.

   d) On résout l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$ à l'aide de la forme factorisée de $f(x)$, ce qui donne une équation produit nul, dont les solutions sont $\frac{4}{3}$ et $-\frac{2}{3}$. Solution : les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses sont $\frac{4}{3}$ et $-\frac{2}{3}$.

   e) Pour tout réel x, $(3x-1)^2 \geqslant 0$, donc $f(x) \geqslant -9$. Remarque : on peut en déduire, en rajoutant le fait que $f(\frac{1}{3}) = -9$, que le minimum de f est -9, atteint pour $x = \frac{1}{3}$.

   f) On résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 7$, à l'aide de la forme initiale de $f(x)$. Après factorisation, on obtient l'équation produit nul $3(3x-5)(x+1) = 0$. Solution : $f(x) = 7$ sur $\mathbb{R}$ ssi $x \in \left\{\frac{5}{3}; -1\right\}$.

Ex. 9 On remarque que les deux équations sont des équations quotient nul.

a) Le quotient $\dfrac{2x+1}{3x-1} = 0$ est défini sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}$.

Solution : $\dfrac{2x+1}{3x-1} = 0$ sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}$ ssi $x = -\frac{1}{2}$

b) Le quotient $\dfrac{(x-1)(2x+3)}{x+2} = 0$ est défini sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Solution : $\dfrac{(x-1)(2x+3)}{x+2} = 0$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ ssi $x \in \left\{1; -\frac{3}{2}\right\}$.

Ex. 10

1. La valeur interdite du quotient est $-\frac{1}{2}$.
2.

$$\begin{aligned}\frac{3x}{2x+1} + x &= \frac{3x}{2x+1} + \frac{x \times (2x+1)}{2x+1} \\ &= \cdots \\ &= \frac{x(2x+4)}{2x+1} \\ &= \frac{2x(x+2)}{2x+1}\end{aligned}$$

3. On remarque qu'il s'agit d'une équation quotient nul à résoudre sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$. Solution : $\dfrac{3x}{2x+1} + x = 0$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$ ssi $x \in \{0, -2\}$.

Ex. 11

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2x^2 \geqslant$, donc $2x^2 + 1 \geqslant 1 > 0$, donc l'équation $2x^2 + 1 = 0$ n'admet aucune solution sur $\mathbb{R}$: la proposition est fausse.
2. L'équation $3x(x+2) = 1$ (sur $\mathbb{R}$) n'est pas équivalente à $3x = 1$ ou $x + 2 = 1$ (sur $\mathbb{R}$) puisque (par exemple) $x = \frac{1}{3}$ n'est pas solution de $3x(x+2) = 1$: $3 \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3} + 2\right) = \frac{7}{3} \neq 1$. La proposition est donc fausse.

   Remarque : le «raisonnement» (faux) utilisé est celui d'un élève qui croit pouvoir dire qu'une équation de la forme $A \times B = 1$ a pour solution $A = 1$ ou $B = 1$. Il y a là une confusion avec le raisonnement correct suivant : $A \times B = 0$ ssi $A = 0$ ou $B = 0$, utilisé pour résoudre une équation produit nul.
3. L'équation $x - 2 = 2x$ (sur $\mathbb{R}$) a pour solution $x = -2$.

   L'équation $(x+3)(x-2) = 2x(x+3)$ conduit, après factorisation, à l'équation produit nul $(x+3)(-x-2) = 0$ sur $\mathbb{R}$, admettant les solutions -3 et -2.

   Donc ces deux équations ne sont pas équivalentes et la proposition est fausse.

   Remarque : l'erreur consiste ici à simplifier par le facteur $(x+3)$ dans les deux membres de l'équation $(x+3)(x-2) = 2x(x+3)$. Or cette simplification n'est possible que si on est sûr que $x + 3 \neq 0$, ce qui n'est pas le cas puisque x est inconnu. On voit que cette erreur conduit à perdre une des deux solutions.
4. Pour résoudre l'équation produit nul $(4x-8)(2x+3) = 0$ sur $\mathbb{N}$, on la résout sur $\mathbb{R}$, ensemble plus grand que $\mathbb{N}$, et on ne garde que les solutions trouvées qui sont des nombres entiers naturels.

   On trouve $(4x-8)(2x+3) = 0$ sur $\mathbb{R}$ ssi $x \in \left\{2; -\frac{3}{2}\right\}$. Or $2 \in \mathbb{N}$ mais $-\frac{3}{2} \notin \mathbb{N}$. Donc $(4x-8)(2x+3) = 0$ sur $\mathbb{N}$ ssi $x = 2$. La proposition est donc vraie.
5. L'équation $x + 1 = 2$ sur $\mathbb{R}$ a pour solution $x = 1$. Or $x = -3$ est solution de l'équation $(x+1)^2 = 4$: $(-3+1)^2 = (-2)^2 = 4$. donc les deux équations ne sont pas équivalentes sr $\mathbb{R}$ et la proposition est fausse.

   Remarque : une résolution correcte de l'équation $(x+1)^2 = 4$ sur $\mathbb{R}$ est la suivante :

$$\begin{gathered}(x+1)^2 = 4 \\ |x+1| = 2 \\ x+1 = 2 \quad \text{ou} \quad x+1 = -2 \\ x = 1 \quad \text{ou} \quad x = -3\end{gathered}$$

   Retenir (cf. cours) : dans $\mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = |x|$. On peut aussi remarquer que l'équation posée étant de degré 2, elle peut admettre (dans certains cas) 2 racines.
6. Tout d'abord on remarque qu'il s'agit d'une équation quotient nul, lequel quotient n'est défini que sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Une résolution facile montre que sur cet ensemble, l'unique solution est $-\frac{1}{3} \neq -2$, donc la proposition est fausse.

Ex. 12 Chacune des équations ci-dessous est équivalente à une équation produit, obtenue à l'aide d'une factorisation. On donne (sans détailler les calculs) pour chaque question cette équation produit (à résoudre sur $\mathbb{R}$) puis son ensemble S de solutions.

a) $2x(4x-5)=0$, $S=\{0, \frac{5}{4}\}$

b) $-3(4x-3)=0$, $S=\{\frac{3}{4}\}$

c) $2(x-3)(3x+7)=0$, $S=\{3; -\frac{7}{3}\}$

Ex. 13

a)

x	$-\infty$		5		$+\infty$
$2x-10$		$-$	0	$+$	

b)

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$-3x+9$		$+$	0	$-$	

c)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-5x$		$+$	0	$-$	

d)

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$3-x$		$+$	0	$-$	

e)

x	$-\infty$		-8		$+\infty$
$0,5x+4$		$-$	0	$+$	

f)

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
$\frac{2}{3}x+1$		$-$	0	$+$	

g)

x	$-\infty$		-10		$+\infty$
$-2-\frac{1}{5}x$		$+$	0	$-$	

h)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{3}{4}x$		$-$	0	$+$	

Ex. 14

1.

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$2x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$(2x-4)(x+3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2.

x	$-\infty$		-2		6		$+\infty$
$-x+6$		$+$		$+$	0	$-$	
$2x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$(-x+6)(2x+4)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

3.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$-5x$		$+$	0	$-$		$-$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{-5x}{1-x}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

Ex. 15

1.

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
$-3x+6$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$(-3x+6)(x+4)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2. D'après le tableau de signes ci-dessus, $(-3x+6)(x+4)>0$ sur $\mathbb{R}$ ssi $x \in \left]-4; 2\right[$.

Ex. 16

1.

x	$-\infty$		0		$\frac{4}{5}$		$+\infty$
$-3x$		$+$	0	$-$		$-$	
$4-5x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{-3x}{4-5x}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

2. L'inéquation $\frac{-3x}{4-5x} \geqslant 0$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{4}{5}\right\}$.
D'après le tableau de signes ci-dessus, $\frac{-3x}{4-5x} \geqslant 0$ sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{4}{5}\right\}$ ssi $x \in \left]-\infty; 0\right] \cup \left]\frac{4}{5}; +\infty\right[$.

Ex. 17

a) $(3x-1)(x+5) \geqslant 0$ est une inéquation produit définie sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-5		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$3x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
$(3x-1)(x+5)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

D'après le tableau de signes ci-dessus, $(3x-1)(x+5) \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$ ssi $x \in \left]-\infty; -5\right] \cup \left[\frac{1}{3}; +\infty\right[$

b) $(2-4x)(2x+6)>0$ est une inéquation produit définie sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-3		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2-4x$		$+$		$+$	0	$-$	
$2x+6$		$-$	0	$+$		$+$	
$(2-4x)(2x+6)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

D'après le tableau de signes ci-dessus, $(2-4x)(2x+6)>0$ sur $\mathbb{R}$ ssi $x \in \left]-3; \frac{1}{2}\right[$

Ex. 18

a) $4x(2x+7) \leqslant 0$ est une inéquation produit définie sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$-\frac{7}{2}$		0		$+\infty$
$4x$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x+7$		$-$	0	$+$		$+$	
$4x(2x+7)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

D'après le tableau de signes ci-dessus, $4x(2x+7) \leqslant 0$ sur $\mathbb{R}$ ssi $x \in \left[-\frac{7}{2}; 0\right]$.

b) $-x(-4x+1)(x+6) < 0$ est une inéquation produit définie sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-6		0		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$-x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$-4x+1$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+6$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$-x(-4x+1)(x+6)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

D'après le tableau de signes ci-dessus, $-x(-4x+1)(x+6) < 0$ sur $\mathbb{R}$ ssi $x \in \left]-\infty; -6\right[\cup \left]0; \frac{1}{4}\right[$.

Ex. 19

a) $\dfrac{-2x+8}{x-7} \geqslant 0$ est une inéquation quotient définie sur $\mathbb{R} \setminus \{7\}$.

x	$-\infty$		4		7		$+\infty$
$-2x+8$		$+$	0	$-$		$-$	
$x-7$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{-2x+8}{x-7}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

D'après le tableau de signes ci-dessus, $\dfrac{-2x+8}{x-7} \geqslant 0$ sur $\mathbb{R} \setminus \{7\}$ ssi $x \in [4; 7[$.

b) $\dfrac{2x+10}{4-x} < 0$ est une inéquation quotient définie sur $\mathbb{R} \setminus \{4\}$.

x	$-\infty$		-5		4		$+\infty$
$2x+10$		$-$	0	$+$		$+$	
$4-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{2x+10}{4-x}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

D'après le tableau de signes ci-dessus, $\dfrac{2x+10}{4-x} < 0$ sur $\mathbb{R} \setminus \{4\}$ ssi $x \in \left]-\infty; -5\right[\cup \left]4; +\infty\right[$.

Ex. 20

a) $\dfrac{3x}{x+4} \geqslant 0$ est une inéquation quotient définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$.

x	$-\infty$		-4		0		$+\infty$
$3x$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{3x}{x+4}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

D'après le tableau de signes ci-dessus, $\dfrac{3x}{x+4} \geqslant 0$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$ ssi $x \in \left]-4; 0\right]$.

b) $\dfrac{(9-x)(2x-1)}{x+3} \leqslant 0$ est une inéquation quotient définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

x	$-\infty$		-3		$\frac{1}{2}$		9		$+\infty$
$9-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$2x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\dfrac{(9-x)(2x-1)}{x+3}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	

D'après le tableau de signes ci-dessus, $\dfrac{(9-x)(2x-1)}{x+3} \leqslant 0$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ ssi $x \in \left]-3; \frac{1}{2}\right] \cup [9; +\infty[$.

Ex. 21

1. On utilise la stratégie ②. En l'apliquant on obtient l'inéquation produit $(x+1)(-x-3) < 0$ qui conduit au tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$	
$-x-3$		$+$	0	$-$		$-$	
$(x+1)(-x-3)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

D'après le tableau de signes ci-dessus, $(2x-3)(x+1) < 4x(x+1)$ sur $\mathbb{R}$ ssi $x \in \left]-\infty; -3\right[\cup \left]-1; +\infty\right[$.

2. On utilise la stratégie ②. En l'apliquant on obtient l'inéquation produit $(5x+3)(-x+3) \geqslant 0$ qui conduit au tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{5}$		3		$+\infty$
$5x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x+3$		$+$		$+$	0	$-$	
$(5x+3)(-x+3)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

D'après le tableau de signes ci-dessus, $(2x+3)^2 \geqslant 9x^2$ sur $\mathbb{R}$ ssi $x \in [-\frac{3}{5}; 3]$.

3. On utilise la stratégie ①. En développant, les x^2 se simplifient et on obtient une inéquation du premier degré. Finalement, on obtient : $16x^2 - 25 > 2x(8x-5)$ sur $\mathbb{R}$ ssi $x \in \left]2,5; +\infty\right[$.

4. On utilise la stratégie ③, qui permet d'obtenir une inéquation quotient. Avant tout, cette inéquation est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Les étapes de la transformation pour obtenir une inéquation quotient sont :

$$\frac{5x+10}{x-1} < 2$$
$$\frac{5x+10}{x-1} - 2 < 0$$
$$\frac{5x+10}{x-1} - \frac{2(x-1)}{x-1} < 0$$
$$\frac{5x+10-2(x-1)}{x-1} < 0$$
$$\frac{5x+10-2x+2}{x-1} < 0$$
$$\frac{3x+12}{x-1} < 0$$

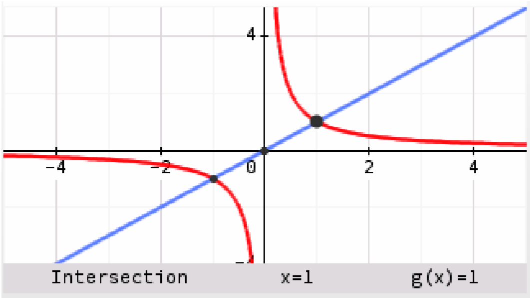
qui est une inéquation quotient définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$3x+12$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{3x+12}{x-1}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

Donc $\dfrac{5x+10}{x-1} < 2$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ ssi $x \in \,]-4; 1[$.

Ex. 22

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$ et g est définie sur $\mathbb{R}$. Remarque : la fonction f est appelée fonction inverse, c'est une une fonction de référence qui sera étudiée dans un chapitre ultérieur. La fonction g est une fonction affine (et même linéaire), aussi appelée fonction identité (l'image $g(x)$ est identique à x).
2. On observe sur calculatrice les courbes suivantes :



Graphiquement, l'ensemble S des solutions sur $\mathbb{R}^*$ de l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$ est $S = [-1; 0[\cup [1; +\infty[$.

3. On résout $f(x) \leqslant g(x)$ sur $\mathbb{R}^*$:

$$f(x) \leqslant g(x)$$
$$\frac{1}{x} \leqslant x$$
$$\frac{1}{x} - x \leqslant 0$$
$$\frac{1}{x} - \frac{x^2}{x} \leqslant 0$$
$$\frac{1-x^2}{x} \leqslant 0$$
$$\frac{(1-x)(1+x)}{x} \leqslant 0$$

On a une inéquation quotient définie sur $\mathbb{R}^*$, pour laquelle on utilise la méthode du tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$1-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$1+x$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{(1-x)(1+x)}{x}$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

D'après le tableau de signes ci-dessus, $f(x) \leqslant g(x)$ sur $\mathbb{R}^*$ ssi $x \in [-1; 0[\cup [1; +\infty[$. Ceci prouve que la conjecture faite à la question précédente était juste.

Ex. 23

a) L'inéquation $(3x-9)(-2x+1) > 0$ est une inéquation produit définie sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$3x-9$		$-$		$-$	0	$+$	
$-2x+1$		$+$	0	$-$		$-$	
$(3x-9)(-2x+1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc (d'après le tableau de signes), $(3x-9)(-2x+1) > 0$ sur $\mathbb{R}$ ssi $x \in \left]\frac{1}{2}; 3\right[$.

b) L'inéquation $-2(7-x)(-3x-2) \leqslant 0$ est une inéquation produit définie sur $\mathbb{R}$. Elle équivaut à $(-14+2x)(-3x-2) \leqslant 0$ (sur $\mathbb{R}$).

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		7		$+\infty$
$-14+2x$		$-$		$-$	0	$+$	
$-3x-2$		$+$	0	$-$		$-$	
$(-14+2x)(-3x-2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc (d'après le tableau de signes), $-2(7-x)(-3x-2) \leqslant 0$ sur $\mathbb{R}$ ssi $x \in \left]-\infty; -\frac{2}{3}\right] \cup [7; +\infty[$.

Ex. 24

a) L'inéquation $4x(5+3x) \leqslant 0$ est une inéquation produit définie sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		0		$+\infty$
$4x$		$-$		$-$	0	$+$	
$5+3x$		$-$	0	$+$		$+$	
$4x(5+3x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc (d'après le tableau de signes), $4x(5+3x) \leqslant 0$ sur $\mathbb{R}$ ssi $x \in \left[-\frac{5}{3}; 0\right]$.

b) L'inéquation $(x+1)(4-2x)(-x-3) \geqslant 0$ est une inéquation produit définie sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-3		-1		2		$+\infty$
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$4-2x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$-x-3$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$(x+1)(4-2x)$ $\times(-x-3)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc (d'après le tableau de signes), $(x+1)(4-2x)(-x-3) \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$ ssi $x \in [-3; -1] \cup [2; +\infty[$.

Ex. 25

a) L'inéquation $\dfrac{x+7}{2x-3} \leqslant 0$ est une inéquation quotient définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

x	$-\infty$		-7		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$x+7$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{x+7}{2x-3}$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

Donc (d'après le tableau de signes), $\dfrac{x+7}{2x-3} \leqslant 0$ sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$ ssi $x \in \left[-7; \frac{3}{2}\right[$.

b) L'inéquation $\dfrac{-3}{4-2x} > 0$ est une inéquation quotient définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
-3		$-$		$-$	
$4-2x$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{-3}{4-2x}$		$-$	$\|$	$+$	

Donc (d'après le tableau de signes), $\dfrac{-3}{4-2x} > 0$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ ssi $x \in \,]2; +\infty[$.

Ex. 26

a) L'inéquation $\dfrac{3-2x}{5x} \geqslant 0$ est une inéquation quotient définie sur $\mathbb{R}^*$.

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$3-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
$5x$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{3-2x}{5x}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Donc (d'après le tableau de signes), $\dfrac{3-2x}{5x} \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}^*$ ssi $x \in \left]0; \frac{3}{2}\right]$.

b) L'inéquation $\dfrac{(2x+6)(5-x)}{3x+2} \leqslant 0$ est une inéquation quotient définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}$.

x	$-\infty$		-3		$-\frac{2}{3}$		5		$+\infty$
$2x+6$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$5-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$3x+2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{(2x+6)(5-x)}{3x+2}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Donc (d'après le tableau de signes), $\dfrac{(2x+6)(5-x)}{3x+2} \leqslant 0$ sur $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{2}{3}\right\}$ ssi $x \in \left[-3; -\frac{2}{3}\right[\cup$ $[5; +\infty[$.

Ex. 27

a) Notons $Q(x) = \dfrac{4x-28}{(5-x)(2x+8)}$. Les valeurs interdites sont ici celles qui annulent le dénominateur $(5-x)(2x+8)$.

$$5-x=0 \qquad\qquad 2x+8=0$$
$$x=5 \qquad\qquad x=-4$$

On résout donc $Q(x) \geqslant 0$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-4; 5\}$.

$$4x-28=0$$
$$x=7$$

x	$-\infty$		-4		5		7		$+\infty$
$4x-28$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$5-x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$2x+8$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$Q(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

D'après le tableau de signes, $Q(x) \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}\setminus\{-4; 5\}$ ssi $x \in]-\infty; -4[\cup]5; 7]$.

b) Notons $Q(x) = \dfrac{-2(x+3)}{x^2} = \dfrac{-2x-6}{x^2}$, défini sur $\mathbb{R}^*$.

$$-2x-6=0$$
$$x=-3$$

x	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
$-2x-6$		$+$	0	$-$		$-$	
x^2		$+$		$+$	0	$+$	
$Q(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	

D'après le tableau de signes, $Q(x) > 0$ sur $\mathbb{R}^*$ ssi $x \in]-\infty; -3[$.