Chpt.6 – Vecteurs et colinéarité
Exercices corrigés

Les solutions données ci-dessous ne sont dans certains cas pas détaillées et on ne donne que les étapes essentielles. Une rédaction correcte suppose des calculs détaillés.

Ex. 1 Puisque $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ avec $\vec{u}\,(-2;\,-4)$ et $\vec{v}\,(3;\,6)$ on a $x_{\vec{u}} = \lambda x_{\vec{v}}$, donc $-2 = 3\lambda$, donc $\lambda = -\frac{2}{3}$: réponse *d*).

Ex. 2 On a $\overrightarrow{AB}\,(-4;\,-2)$ et $\overrightarrow{AC}\,(-7;\,-5)$. De plus

$$\begin{aligned}\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) &= -4\times(-5)-(-7)\times(-2)\\ &= 20-14\\ &= 6\neq 0.\end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, donc A, B et C ne sont pas alignés.

Ex. 3 On a $\overrightarrow{MN}\,(7;\,3)$ et $\overrightarrow{ST}\,(14;\,6)$. On remarque que $\overrightarrow{ST} = 2\overrightarrow{MN}$ (car $14 = 2\times 7$ et $6 = 2\times 3$). Donc $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{ST}$ sont colinéaires, donc (MN) et (ST) sont parallèles.

Ex. 4 Soit $\mathrm{N}\,(x_\mathrm{N};\,y_\mathrm{N})$ (où les réels x_N, y_N sont inconnus). On a $\overrightarrow{KN}\,(x_\mathrm{N}+6;\,y_\mathrm{N}-8)$ et $\overrightarrow{LM}\,(-5;\,-6)$ donc $(-3\overrightarrow{LM})\,(15;\,18)$. Or $\overrightarrow{KN} = -3\overrightarrow{LM}$ donc

$$\begin{cases}x_\mathrm{N}+6 = 15\\ y_\mathrm{N}-8 = 18\end{cases}$$
$$\begin{cases}x_\mathrm{N} = 9\\ y_\mathrm{N} = 26\end{cases}$$

Donc N (9; 26).

Ex. 5
L'égalité vérifiée dans la figure est l'égalité 3 (utiliser direction, sens et norme).

Ex. 6 Les affirmations vraies sont l'affirmation 3 et l'affirmation 4.

Ex. 7

a) $\det(\vec{u},\vec{v}) = -648 \neq 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

b) $\det(\vec{u},\vec{w}) = 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires.

c) $\det(\vec{u},\vec{m}) = 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{m}$ sont colinéaires.

d) $\det(\vec{u},\vec{n}) = 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires.

Ex. 8 Les vecteurs colinéaires au vecteur $\vec{u}$ sont $\vec{w}$ $(= 2\vec{u})$ et $\vec{b}$ $(= -3\vec{u})$.

Ex. 9 L'égalité $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$ implique que :

1. $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{AC}\right\|$.
2. A, B et C sont alignés.
4. $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Ex. 10 Notons $\mathrm{E}\,(x_\mathrm{E};\,y_\mathrm{E})$ et $\mathrm{Y}\,(x_\mathrm{Y};\,y_\mathrm{Y})$.

1. On a $\overrightarrow{AB}\,(4;\,2)$ donc $(-2\overrightarrow{AB})\,(-8;\,-4)$. De plus $\overrightarrow{AE}\,(x_\mathrm{E}-3;\,y_\mathrm{E}+2)$. Or $\overrightarrow{AE} = -2\overrightarrow{AB}$, donc
$$\begin{cases}x_\mathrm{E}-3 = -8\\ y_\mathrm{E}+2 = -4\end{cases}$$
$$\begin{cases}x_\mathrm{E} = -5\\ y_\mathrm{E} = -6\end{cases}$$
Donc E (−5; −6).
2. On a $\overrightarrow{AD}\,(2;\,0)$ donc $(7\overrightarrow{AD})\,(14;\,0)$. De plus $\overrightarrow{EF}\,(x_\mathrm{F}+5;\,y_\mathrm{F}+6)$. Or $\overrightarrow{EF} = 7\overrightarrow{AD}$, donc
$$\begin{cases}x_\mathrm{F}+5 = 14\\ y_\mathrm{F}+6 = 0\end{cases}$$
$$\begin{cases}x_\mathrm{F} = 9\\ y_\mathrm{F} = -6\end{cases}$$
Donc F (9; −6).
3. On a $\overrightarrow{CA}\,(9;\,-6)$ et $\overrightarrow{CF}\,(15;\,-10)$. Donc
$$\begin{aligned}\det(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CF}) &= 9(-10)-15(-6)\\ &= -90+90\\ &= 0.\end{aligned}$$
Donc $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CF}$ sont colinéaires, donc C, A et F sont alignés.

Ex. 11

a) $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{EC}$ *b*) $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BC}$

c) $\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$

Ex. 12 Les vecteurs qui sont colinéaires sont :

$\vec{v}$ et $\vec{e}$

$\vec{w}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$

$\vec{u}$ et $\vec{a}$

Ex. 15 On a $\det(\vec{u},\vec{v}) = 8a-6(-12) = 8a+72$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ssi $\det(\vec{u},\vec{v}) = 0$, donc ssi $8a+72 = 0$, donc ssi $a = -9$.

Ex. 18

1. Les vecteurs $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires à $\overrightarrow{AO}$.
2. On sait que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ car ABCD est un parallélogramme. De plus $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC}$. Donc $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}$ sont colinéaires.

Ex. 19

1. $\overrightarrow{AB}\,(-8;\,-12)$.
2. $\overrightarrow{CD}\,(6;\,9)$.

3. $$\begin{aligned}\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) &= -8\times 9 - 6(-12)\\ &= -72+72\\ &= 0.\end{aligned}$$

   Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
4. Puisque $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, on en déduit pour les droites (AB) et (CD) qu'elles sont parallèles.

Ex. 21

1. $\overrightarrow{AB}\,(4;\,-4)$.
2. $\overrightarrow{AC}\,(1;\,-8)$.
3. $$\begin{aligned}\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) &= 4\times(-8) - 1\times(-4)\\ &= -32+4\\ &= -28 \neq 0.\end{aligned}$$

   Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.
4. Puisque $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, on en déduit que les points A, B et C ne sont pas alignés.

Ex. 26

1. $\vec{u}\,(5;\,-8)$ et $\vec{v}\,(a;\,25)$ sont colinéaires ssi $a=-\frac{125}{8}$.
2. $\vec{u}\left(\frac{3}{5};\,-\frac{7}{12}\right)$ et $\vec{v}\left(-\frac{2}{7};\,a\right)$ sont colinéaires ssi $a=\frac{5}{18}$.
3. $\vec{u}\left(\frac{3}{4};\,\frac{1}{6}\right)$ et $\vec{v}\left(a;\,-\frac{2}{3}\right)$ sont colinéaires ssi $a=-3$.
4. $\vec{u}\,(7;\,3)$ et $\vec{v}\,(2a+5;\,-3a+2)$ sont colinéaires ssi $a=-\frac{1}{27}$.

Ex. 29

a) $(\vec{u}+\vec{v})\,(8;\,0)$ *b*) $(\vec{u}+\vec{v}+\vec{w})\,(7;\,-4)$
c) $(2\vec{u})\,(6;\,-4)$ *d*) $(3\vec{u}-5\vec{v})\,(-16;\,-16)$

Ex. 30

1. *a*) $\overrightarrow{AB}\,(6;\,-2)$ *b*) $\overrightarrow{AC}\,(4;\,2)$
   c) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\,(10;\,0)$
2. *a*) $\overrightarrow{AE}\,(x_E+1;\,y_E-3)$.
   b) $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ donc
   $$\begin{cases}x_E+1=10\\ y_E-3=0\end{cases}$$
   $$\begin{cases}x_E=9\\ y_E=3\end{cases}$$
   Donc E (9; 3).

Ex. 33

1. $\overrightarrow{MN}\,(9;\,-3)$, $\overrightarrow{MP}\,(t+3;\,1)$, donc
   $$\begin{aligned}\det(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}) &= 9+3(t+3)\\ &= 3t+18.\end{aligned}$$
   Les points M, N et P sont alignés ssi
   $$\begin{aligned}&\det(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP})=0\\ &3t+18=0\\ &t=-6\end{aligned}$$
   Donc les points M, N et P sont alignés ssi $t=-6$.
2. (calculs non détaillés) Les points M, N et P sont alignés ssi $t=9$.
3. (calculs non détaillés) Les points M, N et P sont alignés ssi $t=\frac{43}{7}$.
4. (calculs non détaillés) Les points M, N et P sont alignés ssi $t=\frac{13}{4}$.

Ex. 34

1. On a $\overrightarrow{AB}\,(8;\,5)$ et $\overrightarrow{AM}\,(x+1;\,-3)$. Donc
   $$\begin{aligned}\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) &= -24-5(x+1)\\ &= -24-5x-5\\ &= -5x-29\end{aligned}$$
   Les points A, B et M sont alignés ssi $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})=0$ donc ssi
   $$\begin{aligned}&-5x-29=0\\ &-5x=29\\ &x=-\frac{29}{5}\end{aligned}$$
   Les points A, B et M sont alignés ssi $x=-\frac{29}{5}=-5,8$.
2. On a $\overrightarrow{CN}\,(-2;\,y-4)$ et $\overrightarrow{AB}\,(8;\,5)$. Donc
   $$\begin{aligned}\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CN}) &= -10-8(y-4)\\ &= -10-8y+32\\ &= -8y+22\end{aligned}$$
   Les droites (AB) et (CN) sont parallèles ssi $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CN})=0$ donc ssi
   $$\begin{aligned}&-8y+22=0\\ &8y=22\\ &y=\frac{22}{8}=\frac{11}{4}\end{aligned}$$
   Donc les droites (AB) et (CN) sont parallèles ssi $y=\frac{11}{4}=2,75$.

Ex. 35

1. $\overrightarrow{FG}\,(5;\,2)$.
2. $\overrightarrow{GH}\,(x-6;\,y-5)$.
3. Le point G est le milieu du segment [FH] ssi $\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{GH}$, donc ssi
   $$\begin{cases}5=x-6\\ 2=y-5\end{cases}$$
   $$\begin{cases}x=11\\ y=7\end{cases}$$
   Donc G est le milieu de [FH] ssi H (11; 7).

Ex. 37 Dans le repère orthonormé choisi on a A (0; 0), B (10; 0), D (0; 4), M $(x;\,0)$ et N $(;\,y)$ où $x\in[0;10]$ et $y\in[0;4]$.

D'après la figure, dans le repère d'origine A choisi, $(Ox)=(AB)$ et $(Oy)=(AD)$.

Le quadrilatère ABCD est un rectangle donc les droites (DC) et (AB) sont parallèles, donc (DC) est parallèle à (Ox).

Or M′ est sur (DC), donc $y_{M'}=y_D=4$, donc M′ $(x;\,4)$.

Semblablement, on montrerait que $\mathrm{N}'\,(10;\,y)$.
Donc $\overrightarrow{\mathrm{MN}'}\,(10-x;\,y)$ et $\overrightarrow{\mathrm{M}'\mathrm{N}}\,(-x;\,y-4)$. Donc

$$\begin{aligned}\det(\overrightarrow{\mathrm{MN}'},\overrightarrow{\mathrm{M}'\mathrm{N}}) &= (10-x)(y-4)+xy\\ &= 10y-40-xy+4x+xy\\ &= 4x+10y-40.\end{aligned}$$

Les droites (MN') et $(\mathrm{M}'\mathrm{N})$ sont parallèles ssi $\det(\overrightarrow{\mathrm{MN}'},\overrightarrow{\mathrm{M}'\mathrm{N}}) = 0$, donc ssi $4x+10y-40=0$, avec $x \in [0;10]$ et $y \in [0;4]$.

Rq. : on peut aussi établir ce résultat sans les vecteurs, en utilisant la réciproque du théorème de Thalès (avec une configuration «papillon»).