DS4 – Seconde

Corrigé

Exercice 1 (4,5 pts.)

1.

x	-4		-3		$-0,5$		2
$f(x)$	0	↘	$-0,5$	↗	$2,5$	↘	-1

2. La fonction f est décroissante sur $[-4; -3]$
   La fonction f est croissante sur $[-3; -0,5]$
   La fonction f est décroissante sur $[-0,5; 2]$
3. Le maximum de f sur $[-4; 2]$ est $2,5$, atteint en $x = -0,5$.
   Le minimum de f sur $[-4; 2]$ est -1, atteint en $x = 2$.

Exercice 2 (4,5 pts.)

1. Les courbes de f, g et h observées sur la calculatrice ont les allures suivantes :

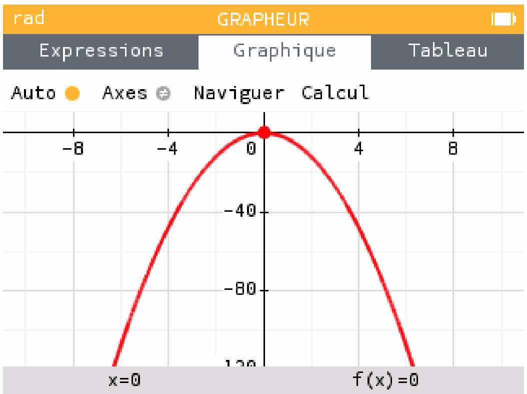


FIGURE 1 – Courbe de f.

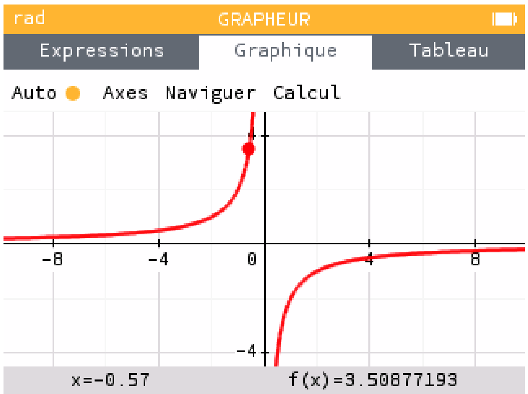


FIGURE 2 – Courbe de g.

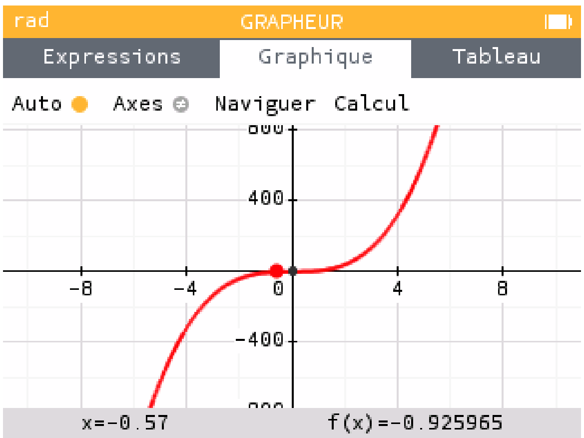


FIGURE 3 – Courbe de h.

On conjecture à l'aide de ces figures que f est paire (car sa courbe semble symétrique par rapport à l'axe des ordonnées), g et h impaires (car leurs courbes semblent symétriques par rapport à l'origine du repère).

2. Démontrons que f, définie sur $\mathbb{R}$ est paire. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} f(-x) &= -3\,(-x)^2 \\ &= -3x^2 \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$, ce qui prouve que f est paire.

Démontrons que g, définie sur $\mathbb{R}^*$ est impaire. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Alors :

$$\begin{aligned} g(-x) &= -\frac{2}{-x} \\ &= \frac{2}{x} \\ &= -\left(-\frac{2}{x}\right) \\ &= -g(x). \end{aligned}$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $g(-x) = -g(x)$, ce qui prouve que g est impaire.

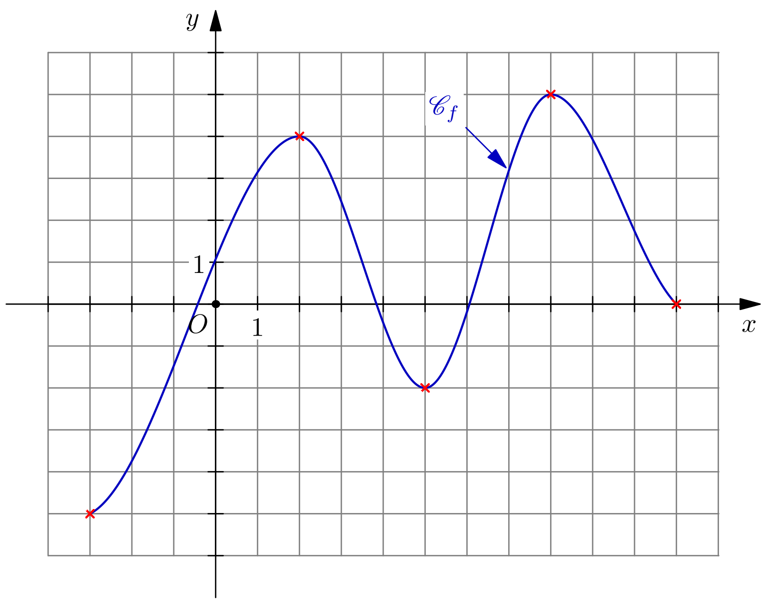
Démontrons que h, définie sur $\mathbb{R}$ est impaire. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} h(-x) &= 5(-x)^3 \\ &= -5x^3 \\ &= -h(x). \end{aligned}$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(-x) = -h(x)$, ce qui prouve que h est impaire.

Exercice 3 (4 pts.)

1.



2. ☐ f est croissante sur I si, pour deux nombres u et v de I, $u \leqslant v$ et $f(u) \leqslant f(v)$

   ☑ f est croissante sur I si, pour tout nombres u et v de I, si $u \leqslant v$ alors $f(u) \leqslant f(v)$

   ☐ f est croissante sur I si, pour tout nombres u et v de I, si $u \leqslant v$ alors $f(u) < f(v)$

3. *a*) Les nombres 3 et 4 sont dans l'intervalle $[2; 5]$, $3 \leqslant 4$ et f est décroissante sur $[2; 5]$, donc $f(3) \geqslant f(4)$.

   Dit de façon plus concise (et sans perdre en rigueur) :

   On a $2 \leqslant 3 \leqslant 4 \leqslant 5$ et f est décroissante sur $[2; 5]$, donc $f(3) \geqslant f(4)$.

   b) On a $5 \leqslant x \leqslant y \leqslant 8$ et f est croissante sur $[5; 8]$ donc $f(x) \leqslant f(y)$.

   c) On a $\frac{7}{3} = \frac{6}{3} + \frac{1}{3} = 2 + \frac{1}{3}$ donc $\frac{7}{3} \in [2; 5]$. Or f est décroissante sur $[2; 5]$ avec $f(2) = 4$ et $f(5) = -2$, donc le meilleur encadrement de $f\left(\frac{7}{3}\right)$ qu'on peut obtenir à partir des données est $-2 \leqslant f\left(\frac{7}{3}\right) \leqslant 4$.

   On a $6 \in [5; 8]$ et f est croissante sur $[5; 8]$ avec $f(5) = -2$ et $f(8) = 5$, donc le meilleur encadrement de $f(6)$ qu'on peut obtenir à partir des données est $-2 \leqslant f(6) \leqslant 5$.

   On voit que ces deux encadrements ne permettent pas de comparer $f\left(\frac{7}{3}\right)$ et $f(6)$.

d) Si $x \in [2;11]$, alors un seul des trois suivants est possible, et ces cas s'excluent mutuellement.

Si $x \in [2;5]$ alors, puisque f est décroissante sur $[2;5]$ avec $f(5) = -2$, $f(x) \geqslant -2$.
Si $x \in [5;8]$ alors, puisque f est croissante sur $[5;8]$ avec $f(5) = -2$, $f(x) \geqslant -2$.
Si $x \in [8;11]$ alors, puisque f est décroissante sur $[8;11]$ avec $f(11) = 0$, $f(x) \geqslant 0$, donc $f(x) \geqslant -2$.

Dans tous les cas $f(x) \geqslant -2$.

Donc l'implication «si $x \in [2;11]$ alors $f(x) \geqslant -2$» est vraie.

Exercice 4 (4 pts.)

1. On calcule $f(-3)$:

$$\begin{aligned} f(-3) &= -(-3)^2 + 3(-3) + 5 \\ &= -9 - 9 + 5 \\ &= -13 \end{aligned}$$

Donc $f(-3) = -13$.

On calcule $f(2+\sqrt{3})$.

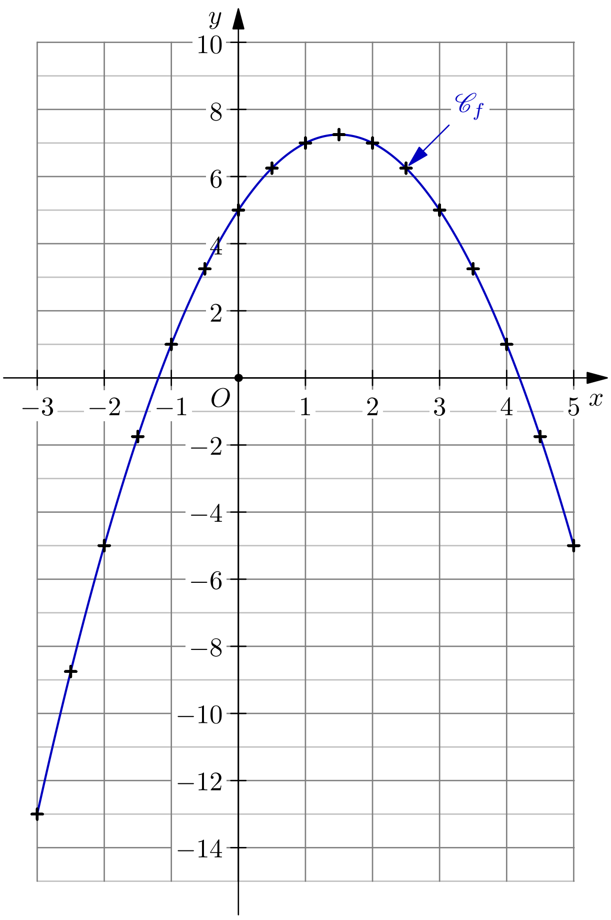
$$\begin{aligned} f(2+\sqrt{3}) &= -(2+\sqrt{3})^2 + 3(2+\sqrt{3}) + 5 \\ &= -(4 + 4\sqrt{3} + 3) + 6 + 3\sqrt{3} + 5 \\ &= -7 - 4\sqrt{3} + 11 + 3\sqrt{3} \\ &= 4 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

Donc $f(2+\sqrt{3}) = 4 - \sqrt{3}$ ($\simeq 2,26$).

2.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	-13	-5	1	5	7	7	5	1	-5

x	$-0,5$	0.5	$1,5$	$2,5$	$3,5$
$f(x)$	$3,25$	$6,25$	$7,25$	$6,25$	$3,25$



3.

4. On calcule $f(x_{\text{A}}) = f(\frac{1}{2})$.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &= -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \times \frac{1}{2} + 5 \\ &= -\frac{1}{4} + \frac{3}{2} + 5 \\ &= -\frac{1}{4} + \frac{6}{4} + \frac{20}{4} \\ &= \frac{25}{4} \\ &= 6,25 \end{aligned}$$

Donc $f(x_{\text{A}}) = 6,25 \neq 6,26 = y_{\text{A}}$, donc $\text{A} \notin \mathscr{C}_f$.

5. On résout sur $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 5$.

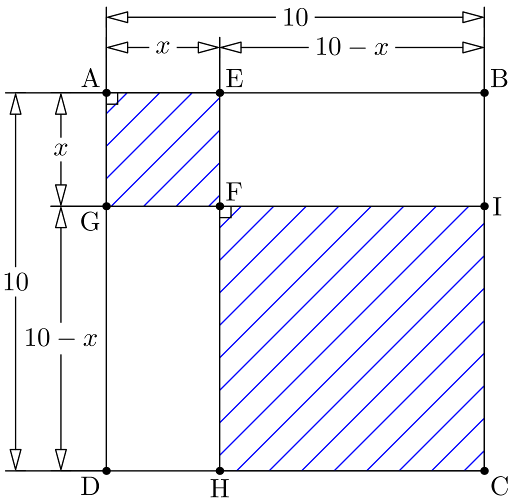
$$\begin{aligned} -x^2 + 3x + 5 &= 5 \\ -x^2 + 3x &= 0 \\ x(-x+3) &= 0 \qquad \text{équation produit nul} \end{aligned}$$

Soit $x = 0$ Soit $-x + 3 = 0$

$x = 3$

Donc les antécédents de 5 par f sont 0 et 3.

Exercice 5 (3 pts.)



1. Le réel $x = \text{AE}$. Or $\text{E} \in [\text{AB}]$, où $\text{AB} = 10$, donc $x \in [0; 10]$.
2. Le quadrilatère AEFG est un carré de côté $\text{AE} = x$ donc d'aire $\mathscr{A}(\text{AEFG}) = x^2$.

   Le quadrilatère FICH est un carré de côté $\text{FI} = 10 - x$ donc d'aire $\mathscr{A}(\text{FICH}) = (10 - x)^2$.

   On veut

$$\begin{aligned} &\mathscr{A}(\text{AEFG}) + \mathscr{A}(\text{FICH}) \leqslant 58 \\ &x^2 + (10 - x)^2 \leqslant 58 \\ &x^2 + 100 - 2x + x^2 \leqslant 58 \\ &2x^2 - 2x + 42 \leqslant 0 \end{aligned}$$

   Donc le problème posé revient à résoudre sur I l'inéquation $2x^2 - 2x + 42 \leqslant 0$.

3. Soit $x \in \text{I}$. On a

$$\begin{aligned} (2x - 6)(x - 7) &= 2x^2 - 14x - 6x + 42 \\ &= 2x^2 - 20x + 42 \end{aligned}$$

   Donc, pout tout $x \in \text{I}$, $2x^2 - 20x + 42 = (2x - 6)(x - 7)$.

4. *a*) On résout sur I $(2x-6)(x-7) \leqslant 0$, qui est une inéquation produit à deux facteurs du premier degré.

$$\begin{aligned} 2x-6&=0 \\ x&=3 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x-7&=0 \\ x&=7 \end{aligned}$$

x	0		3		7		10
$2x-6$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-7$		$-$		$-$	0	$+$	
$(2x-6)(x-7)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc, d'après le tableau de signes, $(2x-6)(x-7) \leqslant 0$ sur I ssi $x \in [3;7]$.

b) Donc les solutions du problème posé sont toutes les positions du point E telles que $\mathrm{AE} \in [3;7]$.

Exercice 6 (1 pt. bonus)
Soit f affine définie sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme $f(x) = ax + b$ où a, b sont deux réels. Supposons que f soit telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f\left(f(x)\right) = 4x - 3$. Alors :

$$\begin{aligned} &f(ax+b) = 4x-3 \\ &a(ax+b)+b = 4x-3 \\ &a^2x + (ab+b) = 4x-3 \end{aligned}$$

En particulier, pour $x = 0$: $ab + b = -3$, et pour $x = 1$: $a^2 + ab + b = 1$, d'où on déduit $a^2 = 4$, soit $a = 2$ ou $a = -2$.

Si $a = 2$, $ab + b = 3b = -3$, d'où $b = -1$ et $f(x) = 2x - 1$.
Si $a = -2$, $ab + b = -b = -3$, d'où $b = 3$ et $f(x) = -2x + 3$.

Réciproquement, si f est affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 1$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(f(x))2(2x-1)-1= 4x-2-1 = 4x-3$, donc f convient. De même, si g est affine définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -2x+3$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(g(x)) = -2(-2x+3)+3 = 4x-6+3 = 4x-3$, donc g convient.

En conclusion, il existe deux fonctions affines telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(f(x)) = 4x - 3$, les deux fonction f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 1$ et $g(x) = -2x + 3$.