Chpt 3. Fiche d'exercices N° 2.

Activité 1.

Une conjecture d'Erdös

Objectif
Calculer avec des fractions.

Le mathématicien hongrois Paul Erdös (1913-1996) a émis la conjecture suivante : « Tout nombre rationnel de la forme $\frac{4}{n}$, avec n entier supérieur ou égal à 2, peut être écrit comme somme de trois fractions unitaires, c'est-à-dire qu'il existe trois entiers naturels non nuls x, y et z tels que :

$$\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$$

On peut présenter les premiers triplets dans le tableau suivant (en rangeant les entiers x, y et z dans l'ordre croissant).

n	x	y	z	
2	1	2	2	$\frac{4}{2}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$
3	2	2	3	$\frac{4}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$
4	2	4	4	$\frac{4}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$

1 Trouver deux autres triplets $(x\,;y\,;z)$ pour $n=3$ et un autre pour $n=4$.

2 Poursuivre et compléter le tableau jusqu'à $n=12$. On pourra au choix tester différents triplets $(x\,;y\,;z)$ et donner la valeur de n associée ou se donner une valeur de n et chercher des triplets associés.

1985, Paul Erdös avec Terence Tao, alors âgé de 10 ans. En 2006, Terence Tao reçoit la médaille Fields.

Info
La conjecture de Paul Erdös n'est toujours pas démontrée en 2019. S'il existe un nombre entier n pour lequel elle n'est pas vraie, on sait que n s'écrit avec plus de 14 chiffres…

Activité 2

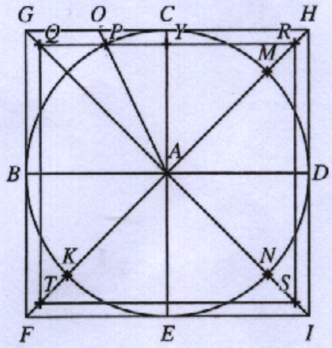
Quadrature du cercle

Objectif
Découvrir la nature d'un nombre.
Calculer en utilisant des fractions et des racines carrées.

Dans son opuscule *Quadratura circuli, cubatio sphaerae, dupplicatio cubi, una cum responsione ad objectiones geometriae*, édité en 1669, le philosophe Thomas Hobbes affirme :

> **SIt (in Figura prima) Circulus datus BCDE, cujus centrum A, divisus quadrifariam à diametris BD, CE. Circulo huic circumscribatur quadratum FGHT, quod tangit circulum in punctis B, C, D, E. Ducantur diagonales GI, HF secantes circulum in punctis K, L, M, N. Secetur semilatus CG bifariam in O, ducaturque AO secans circulum in P. Per punctum P ducatur recta QR parallela GH, secans AG, AH in Q & R, & AC in Y, compleaturque quadratum QRST. Dico quadratum QRST æquale esse Circulo BCDE dato.**

« … que l'aire du carré *QRST* est égale à celle du cercle *BCDE*. »
La figure ci-contre reproduit celle présentée au début de l'ouvrage.
FGHI est un carré de côté 2, O est le milieu de $[GC]$ et la droite (QY) est parallèle à la droite (GC).



1 **a.** Calculer la valeur exacte du rapport $\frac{AP}{AO}$.
b. Les triangles AGC et AQY sont homothétiques. En déduire la valeur exacte de la longueur QY.
c. Calculer l'aire du carré $QRST$.

2 On suppose vraie l'affirmation de Hobbes.
Déduire des questions précédentes une expression de π sous forme d'un quotient, puis d'un décimal. Conclure.

Info
La « quadrature du cercle » est la recherche de la construction, à l'aide de la règle et du compas, d'un carré dont l'aire est égale à celle d'un disque. En 1882, Lindemann démontre que cette construction est impossible.

Connaître le cours

36 Pour chacun des nombres suivants, indiquer le plus petit ensemble de nombres auquel il appartient.

1. 4 2. $-\frac{1}{4}$ 3. $(-5)^2$ 4. $\sqrt{5}$
5. $\left(\sqrt{7}\right)^3$ 6. π 7. $\frac{8}{7}$ 8. $\frac{10}{5}$

37 Pour chacun des nombres suivants, déterminer le plus petit ensemble de nombres auquel il appartient.

1. $\frac{25}{27}$ 2. $\frac{27}{25}$ 3. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 4. $\frac{234}{567}$ 5. $\frac{567}{234}$ 6. $\frac{3\sqrt{7}}{5}$

38 Donner un exemple de chacune des huit formes d'intervalles existantes.

39 Pour chacune des inégalités suivantes, donner au moins trois valeurs de x solutions.

1. $|x-2|<0{,}1$ 2. $|x-5{,}3|<10^{-3}$ 3. $|x+8{,}5|<0{,}5$

40 Écrire chacun des décimaux suivants sous forme de la somme d'un entier relatif et d'une fraction appartenant à $]0;1[$, puis sous forme d'une fraction irréductible. *Par exemple,* $9{,}25=9+\frac{1}{4}=\frac{37}{4}$.

1. $5{,}5$ 2. $98{,}75$ 3. $-45{,}2$ 4. $-12{,}4$ 5. $12{,}06$

41 Écrire les nombres suivants sans utiliser la notation puissance. Détailler les calculs.

$$A=3^2\times 2^3\ ;\ B=5^{-2}\times 5^4\ ;\ C=\left(\frac{1}{2^2}\right)^5\ ;\ D=\frac{14^5}{7^5}$$

42 Simplifier l'écriture des radicaux suivants en faisant apparaître un produit dont l'un des facteurs est un carré parfait.

$$A=\sqrt{8}\ ;\ B=\sqrt{12}\ ;\ C=\sqrt{75}\ ;\ D=\sqrt{\frac{160}{9}}$$

43 Écrire les nombres suivants sous la forme $a+b\sqrt{3}$

$A=\left(\sqrt{3}-1\right)^2$ $B=\left(\sqrt{3}+2\right)^2$

44 Écrire les nombres suivants sous la forme $a+b\sqrt{7}$.

$A=\left(5+\sqrt{7}\right)^2$ $B=\left(15-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{7}-4\right)$

45 Résoudre les inéquations suivantes.

1. $3x+5>7$ 2. $\frac{2}{3}x-8\leqslant 12$ 3. $\frac{1}{5}-4x>9$

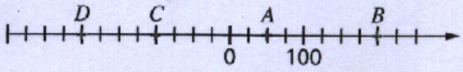
46 Pour chacun des cas suivants déterminer $\mathrm{I}\cap\mathrm{J}$ et $\mathrm{I}\cup\mathrm{J}$.

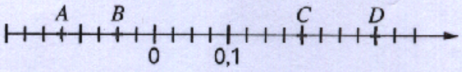
1. $\mathrm{I}=[3;6]$ et $\mathrm{J}=[4;10]$
2. $\mathrm{I}=]-4;6]$ et $\mathrm{J}=[10;15[$
3. $\mathrm{I}=]-\infty;2]$ et $\mathrm{J}=]-2;+\infty[$

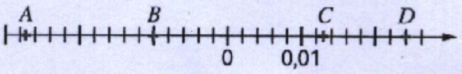
Travailler les capacités du chapitre

Capacité 1 Utiliser la droite des réels

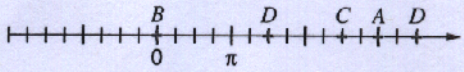
Pour les exercices 47 à 49, avec la précision permise lire les abscisses des points.

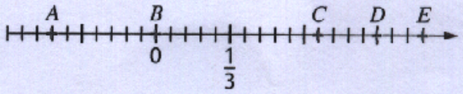
47


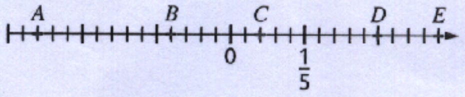
48


49


Pour les exercices 50 à 52, avec la précision permise lire les abscisses des points comme le produit du nombre donné par un réel à déterminer.
Exemple : dans l'exercice 50, l'abscisse de A est 3π.

50


51


52


Capacité 2 Représenter un intervalle

53 Traduire sous forme d'appartenance à un intervalle les propositions suivantes.

1. x est un réel strictement positif.
2. x est un réel supérieur ou égal à 10.
3. y est un réel compris entre -5 exclu et 7 inclus.

54 Exprimer les appartenances suivantes sous forme de phrase.

1. $x\in]-\infty;0]$
2. $x\in]-3;12]$
3. $y\in[5;+\infty[$

55 Dans certains magasins, des mètres en papier sont mis à disposition des clients. Sur l'une des faces, les mesures sont en centimètres. Sur l'autre, elles sont en « inch » et graduées comme le montre la figure. Donner la valeur décimale des abscisses des points.