Chpt.4 – Généralités sur les fonctions
Exercices corrigés

Ex. 1 On a $f(x) = x^2 - 3x + 1$ sur $\mathbb{R}$, donc

$$\begin{aligned}
f(2) &= 2^2 - 3 \times 2 + 1 = 4 - 6 + 1 = -1 \\
f(-2) &= (-2)^2 - 3 \times (-2) + 1 = 4 + 6 + 1 = 11 \\
f(\sqrt{2}) &= \sqrt{2}^2 - 3 \times \sqrt{2} + 1 = 2 - 3\sqrt{2} + 1 = 3 - 3\sqrt{2} \\
&\qquad (\simeq -1,24) \\
f(-\sqrt{2}) &= (-\sqrt{2})^2 - 3 \times (-\sqrt{2}) + 1 = 2 + 3\sqrt{2} + 1 \\
&= 3 + 3\sqrt{2} (\simeq 7,24) \\
f\left(\frac{2}{3}\right) &= \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 3 \times \left(\frac{2}{3}\right) + 1 = \frac{4}{9} - 2 + 1 = -\frac{5}{9} \\
&\qquad (\simeq -0,55)
\end{aligned}$$

Donc $f(2) = -1$, $f(-2) = 11$, $f(\sqrt{2}) = 3 - 3\sqrt{2}$, $f(-\sqrt{2}) = 3 + 3\sqrt{2}$ et $f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{5}{9}$.

Ex. 2

1. On calcule

$$\begin{aligned}
f(2) &= 1 + \frac{-5}{4} = \frac{4}{4} - \frac{5}{4} = -\frac{1}{4} (= -0,25) \\
f(3) &= 1 + \frac{-5}{5} = 1 - 1 = 0 \\
f(4) &= 1 + \frac{-5}{6} = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

   Donc $f(2) = -\frac{1}{4}$, $f(3) = 0$ et $f(4) = \frac{1}{6}$.

2. Non, l'image de -2 par f n'est pas définie.
3. L'image $f(x)$ est calculable ssi $x + 2 \neq 0$, donc ssi $x \neq -2$, donc $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Ex. 3

1. L'expression de $g(x)$ est $g(x) = \sqrt{\frac{x}{2}}$.
2. On peut définir g ssi $\frac{x}{2} \geqslant 0$ donc ssi $x \geqslant 0$, donc $\mathscr{D}_g = \mathbb{R}_+ (= [0; +\infty[)$.
3. On calcule $g\left(\frac{32}{9}\right) = \sqrt{\frac{\frac{32}{9}}{2}} = \sqrt{\frac{32}{18}} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$, donc $g\left(\frac{32}{9}\right) = \frac{4}{3}$.

Ex. 4

1. *a)* $f(-3) = 1$.
   b) $f(2) = \sqrt{3}$.
   c) $g(-5) = 2$.
   d) Les solutions de l'équation $g(x) = 3$ sur $\mathbb{D}_g$ sont -2 et 2.
2. *a)* L'image de -2 par f est 1 et l'image de 1 par g est -2.
   b) Un antécédent de 1 par f est -2 et un antécédent de -2 par g est 1.

Ex. 5

1. On résout $f(x) = 6$ sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
x^2 - 3 &= 6 \\
x^2 &= 9 \\
|x| &= 3 \\
x = 3 \quad &\text{ou} \quad x = -3
\end{aligned}$$

   Donc les antécédents de 6 par f sur $\mathbb{R}$ sont 3 et -3.

   On résout $f(x) = -3$ sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
x^2 - 3 &= -3 \\
x^2 &= 0 \\
x &= 0
\end{aligned}$$

   Donc l'antécédent de -3 par f sur $\mathbb{R}$ est 0.

2. On résout $f(x) = -5$ sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
x^2 - 3 &= -5 \\
x^2 &= -2 < 0
\end{aligned}$$

   Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant 0$.
   Donc -5 n'a pas d'antécédents par f sur $\mathbb{R}$.

Ex. 6

L'expression $f(x)$ est calculable ssi $2 - x \neq 0$, donc ssi $x \neq 2$, donc (le plus grand ensemble sur lequel f peut être définie est) $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

L'expression $g(x)$ est calculable ssi $3x + 3 \neq 0$, donc ssi $x \neq -1$, donc (le plus grand ensemble sur lequel g peut être définie est) $\mathscr{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

L'expression $h(x)$ est calculable ssi $x^2 + 1 \neq 0$. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant 0$ donc $x^2 + 1 \geqslant 1 > 0$, donc (le plus grand ensemble sur lequel h peut être définie est) $\mathscr{D}_h = \mathbb{R}$.

L'expression $j(x)$ est calculable ssi $1 - 2x \geqslant 0$. On résout sur $\mathbb{R}$ cette inéquation :

$$\begin{aligned}
1 - 2x &\geqslant 0 \\
-2x &\geqslant -1 \\
x &\leqslant \frac{1}{2} \\
x &\in \left]-\infty; \frac{1}{2}\right]
\end{aligned}$$

donc (le plus grand ensemble sur lequel j peut être définie est) $\mathscr{D}_j = \left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$.

L'expression $k(x)$ est calculable ssi $x + 4 \geqslant 0$, donc ssi $x \geqslant -4$. Donc (le plus grand ensemble sur lequel k peut être définie est) $\mathscr{D}_k = [-4; +\infty[$.

Ex. 7

1. On sait que $f(-1) = 3$ donc le point de coordonnées $(-1; 3)$ est sur $\mathscr{C}_f$.

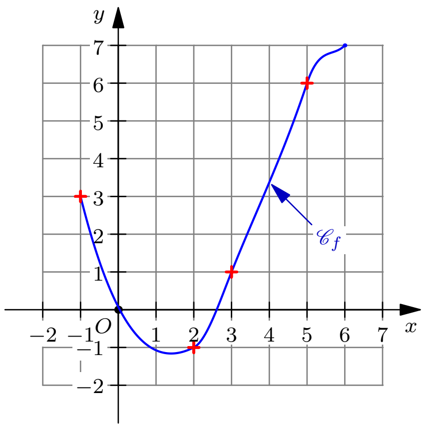
   On sait que $f(3) = 1$ donc le point de coordonnées $(3; 1)$ est sur $\mathscr{C}_f$.

   On sait que $f(2) = -1$ donc le point de coordonnées $(2; -1)$ est sur $\mathscr{C}_f$.

   On sait que $f(5) = 6$ donc le point de coordonnées $(5; 6)$ est sur $\mathscr{C}_f$.

   On sait que $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions sur $[-1; 6]$ donc $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses (Ox) en deux points exactement.

2. Cf. la courbe ci-dessous



Ex. 8

1. L'expression $f(x) = \frac{1}{x}$ est calculable pour $x \neq 0$ donc $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^*$.
2. On a

$$f(-2) = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}(= -0,5)$$
$$f(\frac{2}{3}) = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}(= 1,5)$$
$$f(-\frac{3}{4}) = \frac{1}{-\frac{3}{4}} = -\frac{4}{3}(\simeq -1,33)$$

   Donc $f(-2) = -\frac{1}{2}$, $f(\frac{2}{3}) = \frac{3}{2}$ et $f(-\frac{3}{4}) = -\frac{4}{3}$.

3. On résout successivement sur $\mathbb{R}^*$:

$$f(x) = 10^{-6}$$
$$\frac{1}{x} = 10^{-6}$$
$$x = \frac{1}{10^{-6}}$$
$$x = 10^{6}(= 1\,000\,000)$$

$$f(x) = \frac{5}{3}$$
$$\frac{1}{x} = \frac{5}{3}$$
$$x = \frac{3}{5}(= 0,6)$$

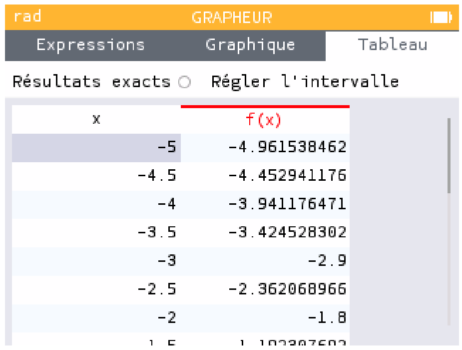
$$f(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\frac{1}{x} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$x = -\sqrt{2}(\simeq -1,414)$$

Donc (sur $\mathbb{R}^*$) l'antécédent de 10^{-6} par f est 10^6, l'antécédent de $\frac{5}{3}$ par f est $\frac{3}{5}$ et l'antécédent de $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ par f est $-\sqrt{2}$.

Ex. 9 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x + \frac{1}{x^2+1}$$

1. Pour tracer $\mathscr{C}_f$, courbe représentative de f, dans un repère, il faut commencer par calculer un ensemble de valeurs d'images, par exemple à l'aide de la calculatrice. En ayant observé l'allure de la courbe de f sur la calculatrice, on voit qu'il est intéressant de tracer (par exemple) $\mathscr{C}_f$ sur $[-5; 5]$, ce qui conduit à faire calculer le tableau de valeurs suivant :

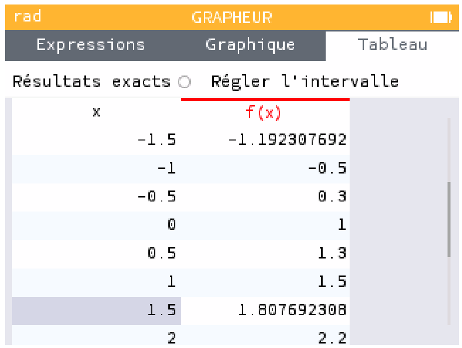


rad GRAPHEUR

Expressions Graphique Tableau

Résultats exacts Régler l'intervalle

x	f(x)
-5	-4.961538462
-4.5	-4.452941176
-4	-3.941176471
-3.5	-3.424528302
-3	-2.9
-2.5	-2.362068966
-2	-1.8

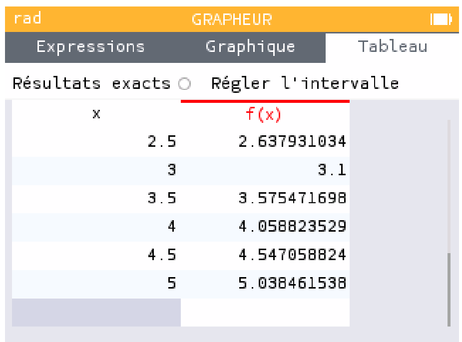


rad GRAPHEUR

Expressions Graphique Tableau

Résultats exacts Régler l'intervalle

x	f(x)
-1.5	-1.192307692
-1	-0.5
-0.5	0.3
0	1
0.5	1.3
1	1.5
1.5	1.807692308
2	2.2



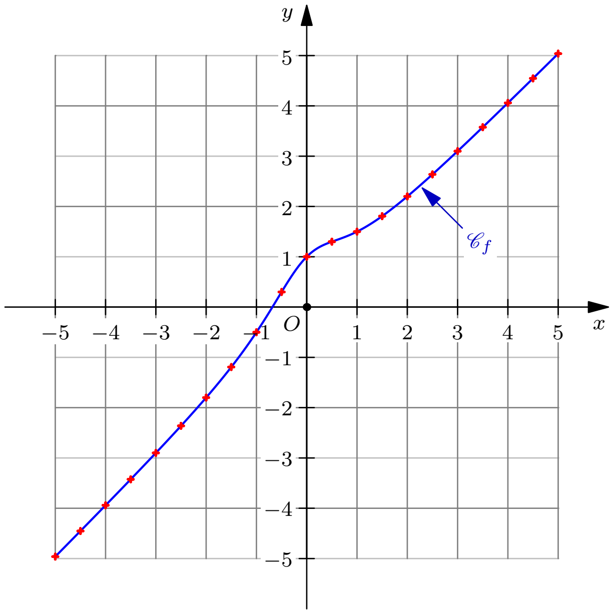
rad GRAPHEUR

Expressions Graphique Tableau

Résultats exacts Régler l'intervalle

x	f(x)
2.5	2.637931034
3	3.1
3.5	3.575471698
4	4.058823529
4.5	4.547058824
5	5.038461538

En placant correctement les points, on obtient alors la courbe tracée sur la page suivante (dont on peut vérifier qu'elle a la même allure que celle tracée par la calculatrice) :



2. On réalise les calculs d'images suivants (non détaillés) :

$$f(x_{\text{A}}) = f(-2) = \cdots = -1,8 = y_{\text{A}}$$
$$f(x_{\text{B}}) = f(\sqrt{2}) = \cdots = \sqrt{2} + \frac{1}{3} \simeq 1,74 \neq \frac{4}{3} = y_{\text{B}}$$
$$f(x_{\text{C}}) = f(1,2) = \cdots = \frac{491}{305} \simeq 1,609 \neq 1,6 = y_{\text{C}}$$
$$f(x_{\text{D}}) = f(-1) = \cdots = -\frac{1}{2} \neq -1 = y_{\text{D}}$$

donc : $\text{A}\,(-2; -1,8) \in \mathscr{C}_f$, $\text{B}\left(\sqrt{2}; \frac{4}{3}\right) \notin \mathscr{C}_f$, $\text{C}\,(1,2; 1,6) \notin \mathscr{C}_f$ et $\text{D}\,(-1; -1) \notin \mathscr{C}_f$.

Remarque : ceci peut être visuellement vérifié sur la courbe affichée par la calculatrice, quitte à réaliser un zoom autour du point concerné pour voir s'il semble ou non sur $\mathscr{C}_f$.

Ex. 10

1. Comme dans l'exercice 9, on peut commencer par observer l'allure de la courbe sur calculatrice, puis faire calculer un tableau de valeurs, par exemple avec un pas de 0, 5. On obtient les valeurs ci-dessous :

rad GRAPHEUR
Expressions Graphique Tableau
Résultats exacts Régler l'intervalle

x	f(x)
-4	1.12244898
-3.5	1.158940397
-3	1.214285714
-2.5	1.303797468
-2	1.461538462
-1.5	1.774193548
-1	2.5

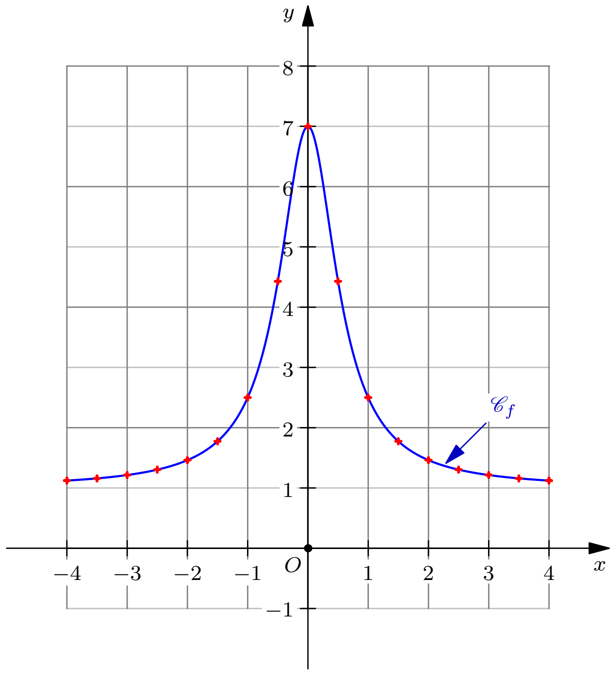
rad GRAPHEUR
Expressions Graphique Tableau
Résultats exacts Régler l'intervalle

x	f(x)
-0.5	4.428571429
0	7
0.5	4.428571429
1	2.5
1.5	1.774193548
2	1.461538462
2.5	1.303797468
3	1.214285714

rad GRAPHEUR
Expressions Graphique Tableau
Résultats exacts Régler l'intervalle

x	f(x)
1.5	1.774193548
2	1.461538462
2.5	1.303797468
3	1.214285714
3.5	1.158940397
4	1.12244898

2. En placant correctement les points, on obtient alors la courbe tracée ci-dessous (dont on peut vérifier qu'elle a la même allure que celle tracée par la calculatrice) :



Ex. 11

1. Graphiquement, le poids du chat à l'âge de 3 ans est de 5 kg car $f(3) = 5$.
2. Graphiquement, le poids de naissance du chatest de 1 kg, car $f(0) = 1$.
3. Graphiquement, le chat pèsera 3 kg à 1, 5 an car l'antécédent de 3 par f est 1, 5.
4. Graphiquement, le chat pèsera entre 4 et 5 kg entre 2, 25 et 3, 25 an car, si $2,25 \leqslant x \leqslant 3,25$ alors $4 \leqslant f(x) \leqslant 5$.
5. Graphiquement, le chat aura atteint son poids adulte à 5 an car, si $x \geqslant 5$ alors $f(x) = 6$.
6. Graphiquement, le chat aura atteint la moitié de son poids adulte à 1, 5 an car $f(1,5) = 3$.

Ex. 12 De gauche à droite et de haut en bas, les courbes qui sont des représentations graphiques de fonctions (de la variable x) sont la 2ᵉ et la 3ᵉ.

Ex. 13

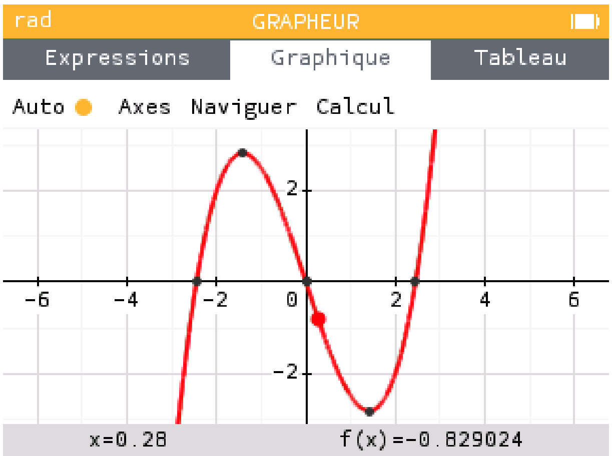
1. Graphiquement, $f(x) = 2$ sur $[-5; 8]$ ssi $x \in \{1; 2; 6\}$.
2. Graphiquement, $f(x) = -3$ sur $[-5; 8]$ ssi $x \in \{-4; -1; 3; 4\}$.
3. Graphiquement, $f(x) \leqslant -3$ sur $[-5; 8]$ ssi $x \in [-4; -1] \cup [3; 4]$.

Ex. 14

1. Graphiquement, $f(x) = 2$ sur $[-5; 6]$ ssi $x \in \{-3; 0; 2; 6\}$.
2. Graphiquement, $f(x) = -1$ sur $[-3; 6]$ ssi $x \in \{2,5; 5\}$.
3. Graphiquement, $f(x) \geqslant -2$ sur $[1; 5]$ ssi $x \in [1; 3] \cup [4,5; 5]$.

Ex. 15

1. On observe sur calculatrice la courbe suivante :



2. Graphiquement, sur $[-3; 3]$, $f(x) = 0$ ssi $x \in \{-2,44; 0; 2,44\}$.

   Remarque : la calculatrice numworks peut aider à trouver les solutions de $f(x) = 0$: dans l'onglet `Graphique`, descendre dans `Calcul` puis `Rechercher` puis `Zéros`. Le curseur se positionne alors sur le point associé à la première valeur de x solution, les suivantes étant obtenues par appuis successifs sur la flèche droite.

3. Algébriquement :

$$\begin{aligned} &f(x) = 0 \\ &0,5x^3 - 3x = 0 \\ &x(0,5x^2 - 3) = 0 \qquad \text{équation produit nul} \end{aligned}$$

   Soit $x = 0$ (où $0 \in [-3; 3]$), soit $0,5x^2 - 3 = 0$, équation que l'on résout sur $[-3; 3]$:

$$\begin{aligned} &0,5x^2 - 3 = 0 \\ &0,5x^2 = 3 \\ &x^2 = 6 \\ &|x| = \sqrt{6} \\ &x = -\sqrt{6} \in [-3; 3] \text{ ou } x = \sqrt{6} \in [-3; 3] \\ &(\text{car } \sqrt{6} \simeq 2,44) \end{aligned}$$

   Donc $f(x) = 0$ sur $[-3; 3]$ ssi $x \in \{-\sqrt{6}; 0; \sqrt{6}\}$.

   Remarque : on vérifie que les valeurs trouvées algébriquement sont cohérentes avec celles trouvées graphiquement.

Ex. 16

1. Graphiquement, l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de f est $\mathscr{D}_f = [-4; 7]$.
2. Graphiquement, $A\,(-2; -1) \notin \mathscr{C}_f$ et $B\,(2; 1) \in \mathscr{C}_f$.
3.

x	-4		-2		1		7
$f(x)$	0	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

4. Graphiquement, le maximum de f (sur $[-4; 7]$) est 2, atteint en $x = 1$ et le minimum de f (sur $[-4; 7]$) est -3, atteint en $x = -2$.

Ex. 17

1. Graphiquement, f est définie sur $\mathscr{D} = [-4; 7]$.
2. Graphiquement,
   - f est croissante sur $[-4; -1]$;
   - f est décroissante sur $[-1; 3]$;
   - f est croissante sur $[3; 5]$;
   - f est décroissante sur $[5; 7]$;
3. Graphiquement $f(x) = -2$ ssi $x \in \{1; 4; 7\}$.
4. Graphiquement, le maximum de f sur $[3; 7]$ est -1, atteint en $x = 5$.

Ex. 18

1. *a*) Cette affirmation est vraie, car pour tout $x \in [-4; 7]$, on peut lire sur les courbes $f(x)$ et $g(x)$, donc f et g sont définies sur $[-4; 7]$.

   b) Cette affirmation est vraie car $\mathscr{C}_g$ est une droite, donc g est affine, mais $\mathscr{C}_g$ ne passe pas par l'origine, donc g n'est pas linéaire.

   En réalité (et en toute rigueur) il faudrait répondre que l'affirmation est fausse, car $\mathscr{C}_g$ n'est qu'un *segment* de droite. Une fonction affine est représentée par une droite, qui est de longueur infinie. Ici, g est ce qu'on appelle la *restriction* à $[-4; 7]$ d'une fonction affine. On a donc confondu ici la fonction affine et sa restriction. Noter au passage que, par convention graphique, pour montrer qu'une courbe d'une fonction est infinie on la représente en la traçant sur toute la place disponible sur le repère de la figure.

   c) Cette affirmation est fausse car f est croissante sur $[-4; -2]$.

   d) Le minimum de f (sur $[-4; 7]$) est -5 (atteint en $x = 7$) et $g(7) = -3,75$ donc cette affirmation est vraie.

2. Graphiquement, les antécédents de -1 par f sont 1, 3 et 4, 5 et l'antécédent de -1 par g est 3 donc la recherche d'antécédent(s) de -1 par f et g ne conduit pas au même résultat ?
3. Graphiquement $f(x) = g(x)$ sur $[-4; 7]$ ssi $x \in \{-3; 0; 3; 6\}$.

Ex. 19

1. *a*) Graphiquement, $f(3) = 0$.

   b) Graphiquement, les antécédents de -4 par f sont -1 et 2.

   c) Graphiquement, l'antécédent de 10 par f est 4, 5.

   d) Graphiquement, les antécédents de -6 par f sont 0 et 1.

   e) Graphiquement, l'ordonnée du point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 5 est 14.

f) Graphiquement, $f(x) = 3$ sur $[-3;5]$ ssi $x \in \{-2,5;3,5\}$.

2.

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{2}\right) &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 6\\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 6\\
&= -\frac{1}{4} - 6\\
f\left(\frac{1}{2}\right) &= -6,25
\end{aligned}$$

3. Soit $x \in [-3;5]$:

$$\begin{aligned}
(x-3)(x+2) &= x^2 + 2x - 3x - 6\\
&= x^2 - x - 6\\
&= f(x)
\end{aligned}$$

donc, pour tout $x \in [-3;5]$, $f(x) = (x-3)(x+2)$. $f(x) = (x-3)(x+2)$.

4. Les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec (Ox) sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur $[-3;5]$. Or, en utilisant l'expression factorisée de $f(x)$ trouvée à la question 3, on a une équation produit nul :

$$(x-3)(x+2) = 0$$

Donc soit $x = 3$, avec $3 \in [-3;5]$, soit $x = -2$, avec $-2 \in [-3;5]$. Donc, les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec (Ox) sont -2 et 3.

Ex. 20

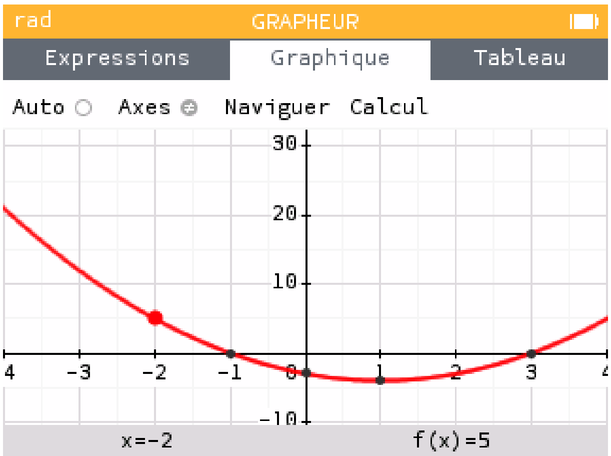
1. Calculons $f(x_{\text{A}}) = f(-2) = \cdots = 5 = y_{\text{A}}$, donc $\text{A}\,(-2;\ 5) \in \mathscr{C}$.
2. *a*) On calcule $f(x_{\text{B}}) = f(2) = \cdots = -3$ donc $\text{B}\,(2;\ -3)$.

   b) On résout sur $\mathbb{R}$ $f(x) = y_{\text{B}} = -3$:

$$\begin{aligned}
x^2 - 2x - 3 &= -3\\
x^2 - 2x &= 0\\
x(x-2) &= 0 \qquad \text{équation produit nul}
\end{aligned}$$

   donc soit $x = 0$, soit $x = 2$. Donc il existe un autre point de $\mathscr{C}$ ayant la même ordonnée que B, le point de coordonnées $(0;\ -3)$.

3.



Ex. 21

1. $f(x) = 2x^2 - 3x - 5$
2. Le point d'abscisse 0 qui appartient à $\mathscr{C}$ est le point de coordonnées $(0;\ -5)$.
3. Le point d'ordonnée -3 qui est sur $\mathscr{C}$ est le point de coordonnées $(2;\ -3)$.
4. On a $f(4) = \cdots = 15 \neq 3$ donc le point $(4;\ 3)$ n'appartient pas à $\mathscr{C}$.

Ex. 22

1. $f(-1) = \cdots = 5$.
2. On résout $g(x) = -3$ sur $\mathbb{R}$, soit $x - 2 = -3$, donc $x = -1$. Donc l'antécédent de -3 par g est -1.
3. On calcule $f(-2) = \cdots = 11 \neq 3$, donc $\mathscr{C}_f$ ne passe pas par le point $(-2;\ 3)$.
4. On calcule $f(1) = \cdots = -1$ et $g(1) = \cdots = -1$, donc $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ se coupent au point d'abscisse 1 et d'ordonnée -1.

   De même, on calcule $f(3) = \cdots = 1$ et $g(3) = \cdots = 1$, donc $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ se coupent au point d'abscisse 3 et d'ordonnée 1.

   Remarque : vu la formulation de la question, on pouvait essayer ici de résoudre l'équation $f(x) = g(x)$ sur $\mathbb{R}$, afin de trouver *tous* les points où $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ se coupent. Cependant, cela suppose de savoir résoudre une équation du second degré ($x^2 - 4x + 3 = 0$), ce qui n'est pas au programme de la classe de seconde.

Ex. 23

1.

x	-10	$-\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}$	2	10^5
$g(x)$	$-2\,989$	$-12,85$	$0,77$	23	3×10^5

2. Non, certaines valeurs affichées par la calculatrice ne sont pas exactes.

   a) Seules les valeurs de $f(-10)$ et de $f(2)$ sont exactes (cependant une calculatrice comme le numworks indique que $f(-\sqrt{3} = 1 - 8\sqrt{3})$ et que $f(\frac{1}{3}) = \frac{7}{9}$).

   b)

$$\begin{aligned}
f(-\sqrt{3}) &= 3(-\sqrt{3})^3 - (-\sqrt{3}) + 1\\
&= -3(\sqrt{3})^2 \times \sqrt{3} + \sqrt{3} + 1\\
&= -9\sqrt{3} + \sqrt{3} + 1\\
f(-\sqrt{3}) &= 1 - 8\sqrt{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(\frac{1}{3}) &= 3 \times \left(\frac{1}{3}\right))^3 - \frac{1}{3} + 1\\
&= 3 \times \frac{1}{27} - \frac{1}{3} + 1\\
&= \frac{1}{9} - \frac{1}{3} + 1\\
f(\frac{1}{3}) &= \frac{7}{9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(10^5) &= 3 \times \left(10^5)\right)^3 - 10^5 + 1\\
&= 3 \times 10^{15} - 10^5 + 1\\
f(10^5) &= 2\,999\,999\,999\,900\,001
\end{aligned}$$

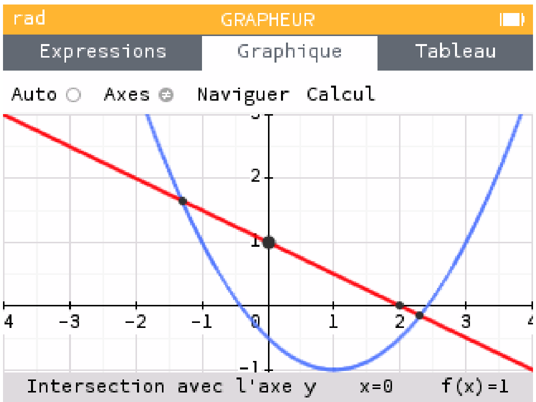
Remarque : le dernier nombre s'obtient par exemple à l'aide d'une soustraction posée et d'une addition :

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc}
 & 3 & {}_10 & {}_10 & {}_10 & {}_10 & {}_10 & {}_10 & {}_10 & {}_10 & {}_10 & {}_10 & {}_10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
- & {}_10 & {}_10 & {}_10 & {}_10 & {}_10 & {}_10 & {}_10 & {}_10 & {}_10 & {}_10 & {}_10 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
 & 2 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

puis

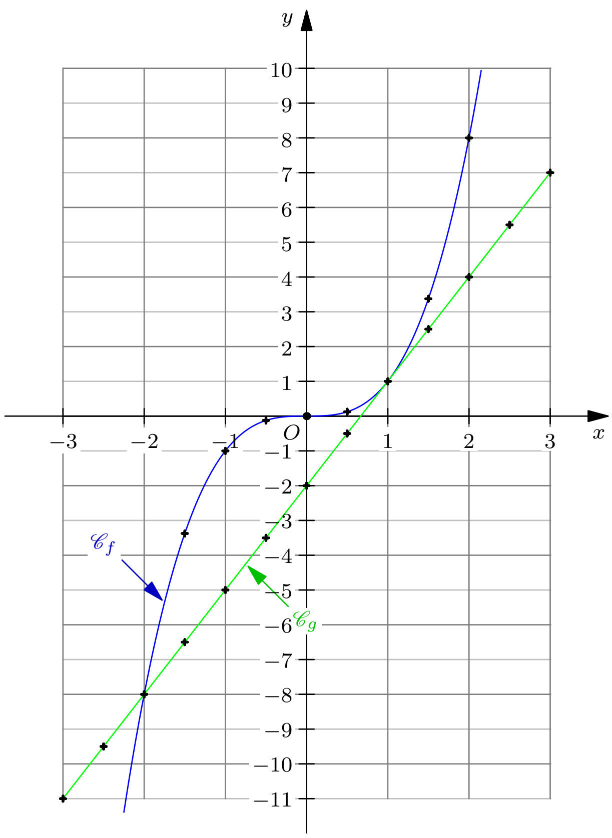
$$2\,999\,999\,999\,990\,000+1 = 2\,999\,999\,999\,990\,001$$

Ex. 24



Ex. 25

1. Après avoir obtenu un tableau de valeurs à l'aide de la calculatrice, le tracé des courbes de f et g donne la figure ci-dessous :



2. Graphiquement, $f(x) \leqslant 1$ sur $\mathbb{R}$ ssi $x \in]-\infty; 1]$.
3. *a)* Graphiquement, $f(x) = g(x)$ sur $\mathbb{R}$ ssi $x \in \{-2; 1\}$.

   b) On doit résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $x^3 - 3x + 2 = 0$. On remarque qu'elle équivaut à l'équation $x^3 = 3x - 2$, c'est à dire $f(x) = g(x)$. En admettant, ce qui est clair d'après le tracé des courbes, que $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ se coupent en seulement deux points, on peut vérifier par le calcul que les deux solutions sont -2 et 1 :

$$\begin{array}{ll} f(-2) = -8 & g(-2) = -6 - 6 = -8 \\ f(1) = 1 & g(1) = 3 - 2 = 1 \end{array}$$

   Donc les deux seules solutions sur $\mathbb{R}$ de $x^3 - 3x + 2 = 0$ sont 1 et -2.

   Remarque : une solution rigoureuse serait de démontrer que $x^3 - 3x + 2 = (x+2)(x+1)^2$ puis de résoudre une équation produit.

Ex. 26

1.

a) Graphiquement, $f(x) = 3$ sur $[-6; 5]$ ssi $x \in \{-6\}$

b) Graphiquement, $f(x) = 0$ sur $[-6; 5]$ ssi $x \in \{-4,75; -2,5; 2; 4\}$

c) Graphiquement, $f(x) = -2$ sur $[-6; 5]$ ssi $x \in \{-4; 3\}$

d) Graphiquement, $f(x) \geqslant 1$ sur $[-6; 5]$ ssi $x \in [-6; -5] \cup [-2; 0] \cup \{5\}$

e) Graphiquement, $f(x) < -1$ sur $[-6; 5]$ ssi $x \in]-4,5; -3[\cup]2,5; 3,5[$

f) Graphiquement, $f(x) \geqslant 0$ sur $[-6; 5]$ ssi $x \in [-6; -4,75] \cup [-2,5; 2] \cup [5; 6]$

2. Les valeurs du réel m possibles telles que l'équation $f(x) = m$ admette exactement deux solutions sont -2 et 2.
3. En fonction des valeurs du réel m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$ sur $[-6; 5]$ est donné par le tableau suivant :

Valeurs de m	Nombre de solutions
$m < -2$	0
$m = -2$	2
$-2 < m \leqslant 1$	4
$1 < m < 2$	3
$m = 2$	2
$2 < m \leqslant 3$	1
$3 < m$	0

Ex. 27

1.

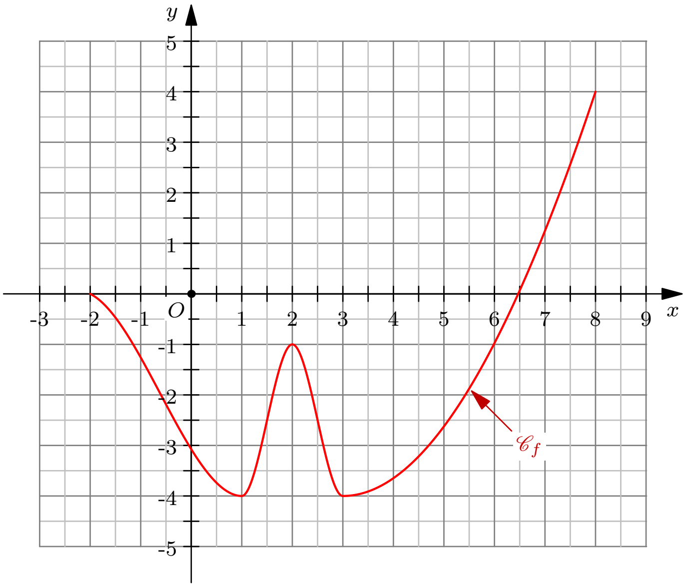
x	-4		-3		$-0,5$		2
$f(x)$	0	$\searrow$	$-0,5$	$\nearrow$	$2,5$	$\searrow$	-1

2. f est décroissante sur $[-4; -3]$

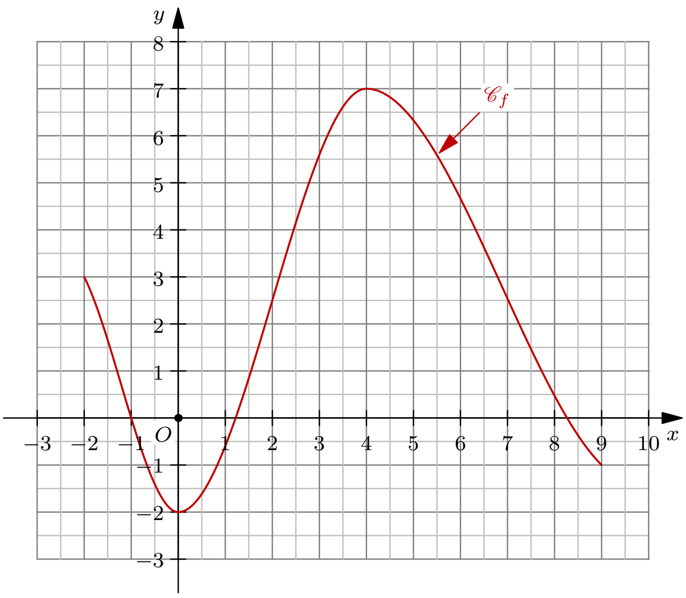
   f est croissante sur $[-3; -0,5]$

   f est décroissante sur $[05, ; 2]$
3. Le maximum de f sur $[-4; 2]$ est $2,5$, atteint en $x = -0,5$ et le minimum de f sur $[-4; 2]$ est -1 atteint en $x = 2$.

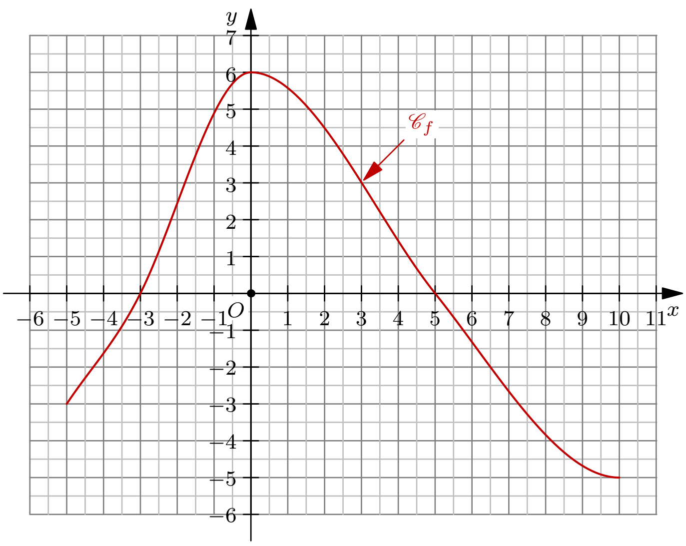
Ex. 28 Une courbe possible est :



Ex. 29 Une courbe possible est :



Ex. 30 Une courbe possible est :

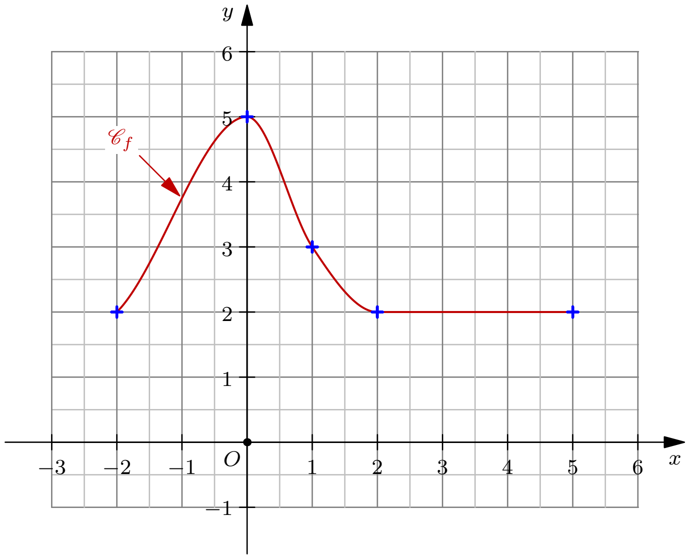


Ex. 31

1.

x	-2		0	1	2		5
$f(x)$	2	$\nearrow$	5	$\searrow$ 3	2	$\rightarrow$	2

2.



Ex. 32

1. Cette affirmation est vraie, c'est le sens de variation de f sur $[-1;0]$ donné par le tableau de variations.

   Remarque : conventionnellement, les flèches des tableaux de variation indiquent des croissances ou décroissances *strictes*. Une fonction est dite strictement croissante (respectivement strictement décroissante) sur I si, pour tous nombres u et v de I : si $u < v$ alors $f(u) < f(v)$ (respectivement $f(u) > f(v)$). Une fonction strictement croissante sur I est croissante sur I, mais la réciproque est fausse en général. C'est ce qui justifie que cette affirmation est vraie.

2. Cette affirmation est fausse : (d'après le tableau de variations) le minimum de f est -4, atteint pour $x = 3$.

3. Cette affirmation est vraie : (d'après le tableau de variations) le maximum de f est 1, atteint en deux points : $x = -4$ et $x = 0$.

4. Cette affirmation est vraie car (d'après le tableau de variations) f est strictement décroissante sur $[-4;-1]$ et $-4 < -3 < -2 < -1$ donc $f(-3) > f(-2)$.

5. On ne peut pas savoir si cette affirmation est vraie (en l'absence d'information supplémentaire). On sait seulement (d'après le tableau de variations) que, puisque $0 < 0,5 < 3$ et que f est strictement décroissante sur $[0;3]$, $f(0) > f(0,5) > f(3)$, soit $-4 < f(0,5) < 1$.

6. On ne peut pas savoir si cette affirmation est vraie (en l'absence d'information supplémentaire). On sait seulement, puisque $-1 < -0,5 < 0$ et que f est strictement croissante sur $[-1;0]$, $f(-1) < f(-0,5) < f(0)$ soit $-1 < f(-0,5) < 1$.

7. On ne peut pas savoir si cette affirmation est vraie (en l'absence d'information supplémentaire). On sait seulement que $0 < 2,5 < 3$ et que (d'après le tableau de variations) f est strictement décroissante sur $[0;3]$, donc $f(0) > f(2,5) > f(3)$, soit $-4 < f(2,5) < 1$. Comme, par ailleurs, on a vu avant que $-1 < f(-0,5) < 1$, il n'est pas possible d'affirmer que $f(-0,5) > f(2,5)$.

Ex. 33

1. *a)* Cette affirmation est vraie, car si $x < 0$ alors, f étant strictement décroissante sur $[-1;0]$, $f(x) > f(0) = 0$.

   b) Cette affirmation est fausse car $f(0) = 0 \in]-2;1[$ et cependant $0 \notin]1;2[$.

   c) En toute rigueur on ne peut pas savoir si cette affirmation est vraie ou fausse, en l'absence d'information supplémentaire. Il est possible par exemple qu'on ait $f(1,5) = 0,5 \in]0;1[$ et cependant $1,5 \notin]-1;1[$.

   d) En toute rigueur on ne peut pas savoir si cette affirmation est vraie ou fausse, en l'absence d'information supplémentaire. On pourrait avoir par exemple $f(1,5) = 0$ sans contredire les informations du tableau de variations, auquel cas l'affirmation serait fausse.

2. *a)* La réciproque est : Si $f(x) > 0$ alors $x < 0$.

   Cette affirmation est fausse. Contre-exemple : avec $x = 1$, $f(1) = 1 > 0$ et cependant $x = 1 \geqslant 0$.

   b) La réciproque est : Si $1 < x < 2$ alors $-2 < f(x) < 1$.

   Cette affirmation est vraie et découle directement de la stricte décroissance de f sur $[1;2]$ indiquée par le tableau de variations.

   c) La réciproque est : Si $-1 < x < 1$ alors $0 < f(x) < 1$.

   Cette affirmation est fausse. Contre-exemple : $-1 < 0 < 1$ et cependant $f(0) = 0 \notin]0;1[$.

   d) La réciproque est : Si $x = 0$ alors $f(x) = 0$.

   Cette affirmation est vraie et directement indiquée par le tableau de variations.

Ex. 34

1.

x	-10		1		5		10
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2. On a $-5 < -1 < -\frac{2}{3} < 1$ et f est strictement croissante sur $[-5;1]$, donc $f(-1) < f\left(-\frac{2}{3}\right)$.

3. D'après le tableau de variations, $1 < 2 < 3$ et f est strictement croissante sur $[1;3]$ avec $f(1) = 0$ et $f(3) = 2$, donc $0 < f(2) < 2$. D'autre part, $3 < 4 < 5$ et f est strictement décroissante sur $[3;5]$, avec $f(3) = 2$ et $f(5) = 0$, donc $0 < f(4) < 2$. Les deux doubles inégalités précédentes ne permettent pas de comparer $f(2)$ et $f(4)$, donc cette affirmation est fausse.

Ex. 35

1.

x	-7	-3	-1	0	1	3	7
$f(x)$	$2400,82$	$80,1$	$-3,5$	-9	$-3,5$	$80,1$	$2400,82$

2. On conjecture que f est paire.

   Démontrons-le : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^4 - \frac{9}{(-x)^2+1} \\ &= x^4 - \frac{9}{x^2+1} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

   donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$, donc f est paire.

Ex. 36 Oui, par exemple la fonction constante f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4$ est paire, puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = 4 = f(x)$. On voit que toute fonction constante est paire. Démontrons que f affine est paire ssi f est constante.

Supposons f affine et paire. La fonction f est affine, donc de la forme $f(x) = ax + b$, où $a, b \in \mathbb{R}$, définie sur $\mathbb{R}$. Elle est paire donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(-x) &= f(x) \\ a(-x) + b &= ax + b \\ 2ax &= 0 \\ ax &= 0 \end{aligned}$$

En particulier, pour $x = 1$, $a = 0$, donc f est constante.

Réciproquement, si f est constante, elle est de la forme $f(x) = b$ avec $b \in \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = b = f(x)$, donc f est paire.

Donc f affine est paire ssi elle est constante.

La fonction linéaire f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$ est un exemple de fonction affine impaire, puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -x = -f(x)$. On voit que toute fonction linéaire est impaire. Démontrons que f affine est impaire ssi f est linéaire.

Supposons f affine et impaire. La fonction f est affine, donc de la forme $f(x) = ax + b$, où $a, b \in \mathbb{R}$, définie sur $\mathbb{R}$. Elle est impaire donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(-x) &= -f(x) \\ a(-x) + b &= -(ax + b) \\ -ax + b &= -ax - b \\ 2b &= 0 \\ b &= 0 \end{aligned}$$

donc f est linéaire.

Réciproquement, si f est linéaire, elle est de la forme $f(x) = ax$ avec $a \in \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = a(-x) = -ax = -f(x)$, donc f est impaire.

Donc f affine est impaire ssi elle est linéaire.

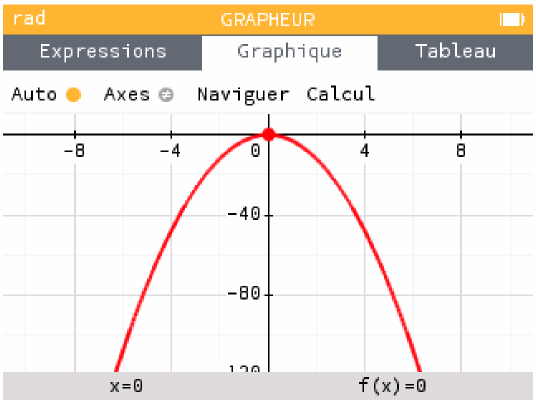
Remarque : on peut réaliser les mêmes démonstrations en utilisant le fait que toute fonction affine est représentée par une droite (non parallèle à l'axe des ordonnées) et le fait qu'une fonction est paire ssi sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, impaire ssi sa courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère.

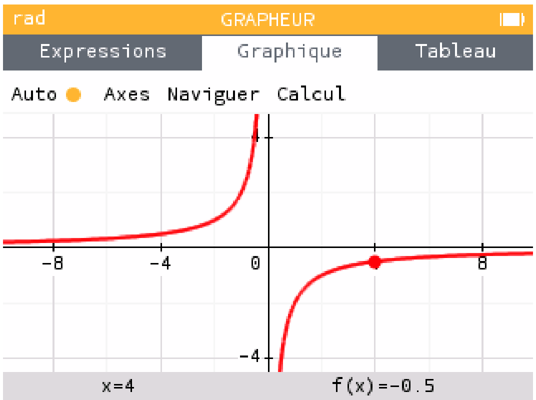
Ex. 37 Soit une fonction f définie sur un ensemble $\mathscr{D}$ tel que, pour tout $x \in \mathscr{D}$, $-x \in \mathscr{D}$.Supposons que f est simultanément paire et impaire. La fonction f est paire et impaire donc, pour tout $x \in \mathbb{D}$, $f(-x) = f(x)$ et $f(-x) = -f(x)$, donc $f(x) = -f(x)$, $2f(x) = 0$, soit $f(x) = 0$. Puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$, f est donc la fonction nulle.

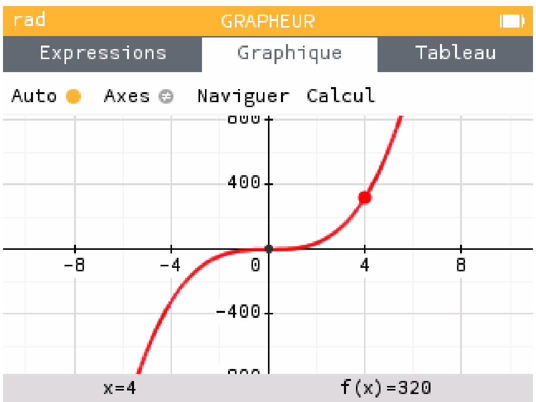
Réciproquement, la fonction nulle est clairement paire et impaire.

Donc la seule fonction paire et impaire est la fonction nulle.

Ex. 38 On peut visualiser les courbes suivantes sur la calculatrice :







Ces courbes permettent de conjecturer que f est paire et que g et h sont impaires.

Prouvons-le. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(-x) &= -3(-x)^2 \\ &= -3x^2 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

donc f est paire.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned} g(-x) &= -\frac{2}{-x} \\ &= \frac{2}{x} \\ &= -\left(-\frac{2}{x}\right) \\ &= -g(x) \end{aligned}$$

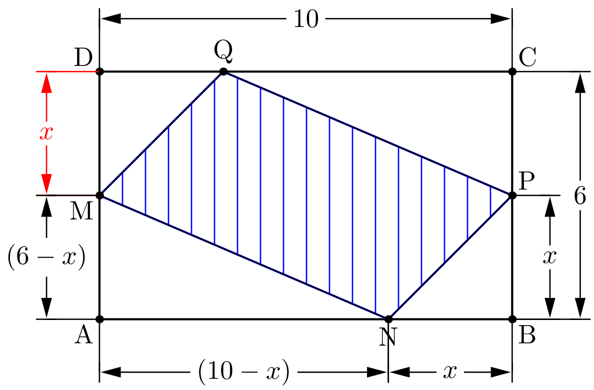
donc g est impaire.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} h(-x) &= 5(-x)^3 \\ &= -5x^3 \\ &= -h(x) \end{aligned}$$

donc h est impaire.

Ex. 39



1.

$$\begin{aligned} A(x) &= \mathscr{A}(MNPQ) \\ &= \mathscr{A}(ABCD) - 2 \times \mathscr{A}(AMN) - 2 \times \mathscr{A}(MDQ) \end{aligned}$$

car les triangles AMN et CPQ sont isométriques, de même que MDQ et PBN

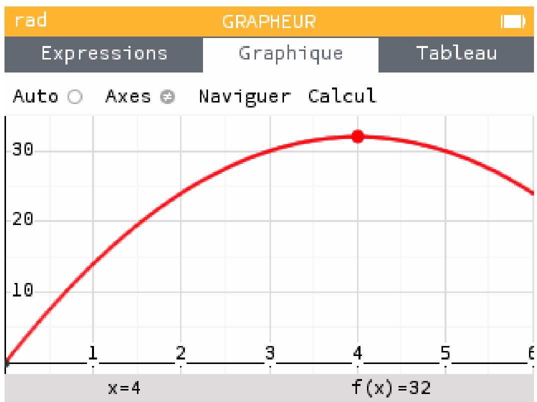
$$A(x) = \text{AD} \times \text{DC} - 2 \times \frac{\text{AM} \times \text{AN}}{2} - 2 \times \frac{\text{MD} \times \text{DQ}}{2}$$

car ABCD est un rectangle et AMN et MDQ sont rectangles en A et D respectivement.

$$\begin{aligned} A(x) &= 10 \times 6 - (6-x)(10-x) - x^2 \\ &= 60 - (60 - 6x - 10x + x^2) - x^2 \\ &= 60 - (60 - 16x + x^2) - x^2 \\ A(x) &= -2x^2 + 16x \end{aligned}$$

La fonction A est définie pour $x \in [0; 6]$.

2. La courbe de A sur calculatrice a l'allure suivante :



On en déduit la conjecture que le maximum de A est de 32 obtenu pour $x = 4$.

3. Pour tout $x \in [0;6]$:

$$\begin{aligned}-2(x-4)^2+32 &= -2(x^2-8x+16)+32\\ &= -2x^2+16x-32+32\\ &= -2x^2+16x\end{aligned}$$

Donc, pour tout $x \in [0;6]$, $A(x) = -2(x-4)^2+32$.

4. Pour tout $x \in [0;6]$,

$$\begin{gathered}(x-4)^2 \geqslant 0\\ -2(x-4)^2 \leqslant 0\\ -2(x-4)^2+32 \leqslant 32\end{gathered}$$

Donc, pour tout $x \in [0;6]$, $A(x) \leqslant 32$.

De plus, $A(4) = -2(4-4)^2+32 = 32$.

Donc le maximum de A est 32 et il atteint pour $x = 4$. L'aire maximale vaut $A(4) = 32$.

Ex. 40

1. On impose que $\mathscr{A}(ABCD) = 300$. Or $\mathscr{A}(ABCD) = \mathrm{AB} \times \mathrm{AD} = \mathrm{AB} \times x$ car ABCD est un rectangle. Donc $\mathrm{AB} \times x = 300$, donc (en supposant que $x \neq 0$),

$$\mathrm{AB} = \frac{300}{x}$$

2. On sait que $x = \mathrm{AD} = 4 + \mathrm{MQ}$ où $\mathrm{MQ} \geqslant 0$, donc $x \geqslant 4$.

De plus $\mathrm{AB} = \frac{300}{x}$ donc $x = \frac{300}{\mathrm{AB}}$. Or, d'après les données,

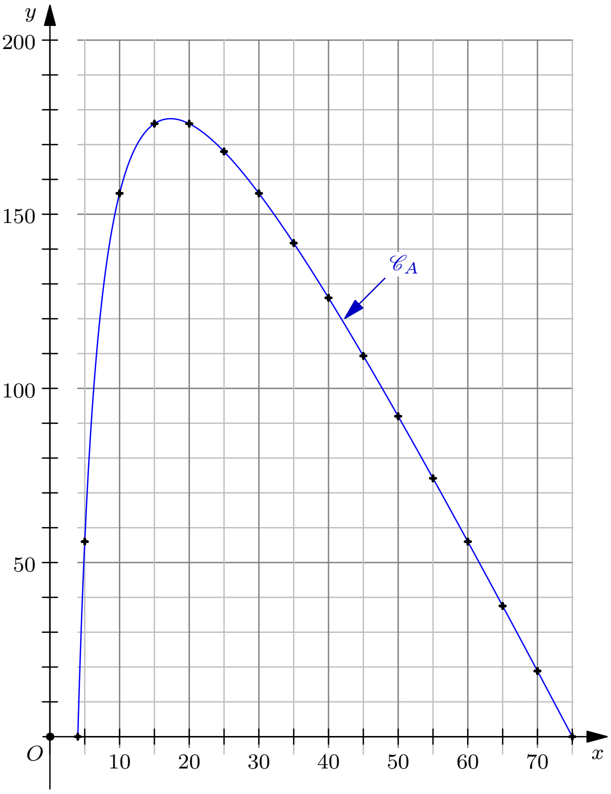
$$\begin{aligned}\mathrm{AB} &\geqslant 4 > 0\\ \frac{1}{\mathrm{AB}} &\leqslant \frac{1}{4} = 0,25\\ x = \frac{300}{\mathrm{AB}} &\leqslant 300 \times 0,25 = 75\end{aligned}$$

Donc $x \in [4;75]$.

3.

$$\begin{aligned}A(x) &= \mathrm{MN} \times \mathrm{MQ}\\ &= (\mathrm{AB}-4) \times (\mathrm{AD}-4)\\ &= \left(\frac{300}{x} - 4\right) \times (x-4)\\ &= \frac{300}{x} \times -\frac{1200}{x} - 4x + 16\\ &= 316 - 4x - \frac{1200}{x}\end{aligned}$$

4. La courbe obtenue a l'allure suivante (où les unités graphiques indiquées dans l'exercice n'ont pas été respectées) :



5. Graphiquement, une approximation de la valeur x_0 qui maximise $A(x)$ est $x_0 \simeq 17,32$ m (pour une aire de $177,43\mathrm{m}^2$). Le tableau de variations de A conjecturé est :

x	4	x_0	75
$f(x)$	0 ↗	$A(x_0)$	↘ 0

6. Si on admet que la piscine aura une aire maximale si elle est de forme carrée, alors $x_0 - 4 = \frac{300}{x_0} - 4$, donc $x_0 = \frac{300}{x_0}$, soit $x_0^2 = 300$, d'où $x_0 = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}$ (car $x_0 \geqslant 0$). On a $x_0 \simeq 1,732 \times 10 = 17,32$. Dans ce cas

$$\begin{aligned}A(x_0) &= A(10\sqrt{3})\\ &= 316 - 4 \times 10\sqrt{3} - \frac{1200}{10\sqrt{3}}\\ &= 316 - 40\sqrt{3} - \frac{120\sqrt{3}}{3}\\ &= 316 - 80\sqrt{3}\\ &\simeq 177,43\end{aligned}$$