Chapitre 1 – Calculs

Table des matières

1 Fonctions de la variable réelle

1.1 Relation d'ordre dans $\mathbb{R}$

- L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels possède deux opérations $(+,\ \times)$ et une relation d'ordre $(\leqslant)$ compatible avec ces opérations :
  - si $a \leqslant b$, alors pour tout réel x on a : $a + x \leqslant b + x$.
  - si $a \leqslant b$, alors pour tout réel $x \geqslant 0$ on a $ax \leqslant bx$ et pour tout réel $x \leqslant 0$ on a $ax \geqslant bx$.
  - si $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$, alors $a + c \leqslant b + d$.
  - si $0 \leqslant a \leqslant b$ et $0 \leqslant c \leqslant d$, alors $ac \leqslant bd$.
- On appelle **partie entière** d'un réel x, l'unique entier noté $\lfloor x \rfloor$ tel que :

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$$

- On dispose dans $\mathbb{R}$ des **inégalités** :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R}^* \qquad [n > 1 \text{ et } x \geqslant -1 \implies (1+x)^n > 1 + nx] \qquad \text{(de Bernoulli)}$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \qquad ab \leqslant \frac{a^2 + b^2}{2}$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \qquad |a + b| \leqslant |a| + |b| \quad \text{et} \quad ||a| - |b|| \leqslant |a - b| \leqslant |a| + |b| \qquad \text{(triangulaires)}$$

►► **Exercice 1** Démontrer les deux premières inégalités.

►► **Exercice 2** Soient x et y des réels. Démontrer les inégalités suivantes :

1. $|x| + |y| \leqslant |x+y| + |x-y|$ 2. $1 + |xy-1| \leqslant (1+|x-1|)(1+|y-1|)$

- La relation d'ordre permet la définition d'**intervalles** de $\mathbb{R}$. Il s'agit de $\mathbb{R}$ et des ensembles :

$[\,a\,;b\,] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ (segment)
$]\,a\,;b\,[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
$[\,a\,;b\,[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$
$]\,a\,;b\,] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$
$[\,a\,;+\infty\,[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x\}$
$]\,a\,;+\infty\,[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$
$]\,-\infty\,;b\,] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant b\}$
$]\,-\infty\,;b\,[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$

- Un intervalle **trivial** est un intervalle réduit à un point (singleton) ou vide.
- L'**intérieur d'un intervalle** I est l'intervalle qui a les mêmes extrémités que I, mais ne les contient pas (on dit qu'il est ouvert) on le note $\mathring{\mathrm{I}}$.
- Un **intervalle non trivial** est un intervalle d'intérieur non vide, ce qui est équivalent à dire qu'il possède (au moins) deux points distincts, qu'il possède une infinité de points distincts. Ses extrémités sont distinctes.
- Une partie A de $\mathbb{R}$ est dite **majorée** (resp. **minorée**) si

$$\exists \mathrm{M} \in \mathbb{R} \quad \forall a \in \mathrm{A} \quad a \leqslant \mathrm{M} \qquad (\text{resp.} \quad \exists m \in \mathbb{R} \quad \forall a \in \mathrm{A} \quad a \geqslant m).$$

On dit alors que M est un **majorant** (resp. m est un **minorant** de A). Si $\mathrm{M} \in \mathrm{A}$ (resp. $m \in \mathrm{A}$), on parlera plutôt de **maximum** (resp. **minimum**) de A.
- Une partie A de $\mathbb{R}$ est dite **bornée** si elle est majorée et minorée.

1.2 Résolution d'(in)équations

- On recommande de nommer (I) ou (E) l'(in)équation et $\mathscr{S}$ l'ensemble de ses solutions.
- On commencera par déterminer les intervalles sur lesquelles l'(in)équation a un sens et peut être écrite sans valeur absolue et, si possible, sans racine carrée car l'objectif des calculs est de se ramener à une (in)équation que l'on sait résoudre (il y en a assez peu : (in)équations du premier ou second degré, égalité de cosinus, sinus ou tangente, puis fonctions réciproques, racines n-ièmes). On sait beaucoup plus facilement dire qu'une (in)équation n'a pas de solution (par étude de fonction).
- Il y a trois façons de procéder :
  - par *équivalences* : on transforme l'(in)équation en d'autres (in)équations équivalentes (qui possèdent le même ensemble solution) de plus en plus simples (jusqu'à ce que les solutions de la dernière soient évidentes).
  - par *implications* : on transforme l'(in)équation en d'autres (in)équations (qui possèdent un ensemble solution incluant celui de départ) et de plus en plus simples (jusqu'à ce que les solutions de la dernière soient évidentes). On doit alors vérifier que ces solutions sont solutions de l'(in)équation de départ.
  - par *analyse-synthèse* : on considère un élément solution de l'(in)équation que l'on note x, puis on détermine par le calculs des valeurs possibles pour x. On vérifie parmi ces valeurs lesquelles sont effectivement solutions.

  Les deux dernières méthodes fonctionnent suivant le même principe, elles nécessitent une vérification *a posteriori*. Les valeurs trouvées forment un ensemble $\mathscr{P}$ de solutions possibles, donc tel que $\mathscr{S} \subset \mathscr{P}$, mais ce n'est qu'une inclusion ! Il faut bien avoir en tête la méthode que l'on est en train d'utiliser pour avoir une rédaction correcte.
- La résolution par équivalence est la plus rapide mais aussi la plus délicate, il faut contrôler et justifier chaque équivalence en particulier lorsqu'on applique une fonction aux deux membres de l'(in)équation (exemple : $x = y$ n'est ni équivalent à $\sin(x) = \sin(y)$, ni à $x^2 = y^2$).
- On doit aussi justifier les calculs quand on procède par implications ou analyse-synthèse mais un sens est suffisant (et c'est souvent le plus simple). En particulier

quand on applique une fonction f à une égalité $x=y$ alors on a toujours $f(x)=f(y)$ (méfiance cependant aux inégalités, si $x \leqslant y$, on devra justifier $f(x) \leqslant f(y)$, souvent à l'aide de la croissance de f sur $[x\,;y]$).
- L'inconnue x apparaissant dans une (in)équation ne désigne pas une solution de celle-ci, c'est une variable qui n'a pas d'existence hors de l'équation. C'est uniquement lorsqu'on procède par analyse synthèse que l'on manipule des x qui sont solutions de l'équation.
- La rédaction par implications est la plus habituelle pour les anciens élèves de terminale, mais souvent la moins maîtrisée car la signification du signe $\Longrightarrow$ parait évident mais ne l'est pas ($\Longrightarrow$ ne veut pas dire « donc »). On déconseille cette méthode. On déconseille d'ailleurs toute utilisation de $\Longrightarrow$ tant qu'elle n'est pas comprise. Et puis on déconseille aussi l'usage de $\Longleftrightarrow$ hors résolution d'(in)équations par équivalence.
- Sur chaque intervalle I, on détermine (par l'une des trois méthodes) l'ensemble $\mathscr{S} \cap \mathrm{I}$ des solutions de l'(in)équation appartenant à I.
- Les erreurs de calculs arrivent vite (opération mentale, problème de signe, coefficient oublié dans un développement, conservation supposée d'une inégalité par produit quelconque ou par soustraction). Ne pas hésiter à tester sur quelques valeurs bien choisies la robustesse de vos déductions.

▶▶ **Exercice 3** Résoudre l'équation $|x+3|-|x-1|=|2x+1|$.

▶▶ **Exercice 4** Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\dfrac{x-3}{x-1} \leqslant 2-x$ et $\dfrac{\sqrt{x+1}}{x-1} \leqslant 2$.

▶▶ **Exercice 5** Résoudre $\left(\dfrac{2x}{1-\sqrt{1+2x}}\right)^2 < 2x+9$ et $\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1} > \dfrac{1}{2}$.

▶▶ **Exercice 6** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}} = m\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}$$

suivant la valeur du paramètre réel m.

1.3 Généralités sur les fonctions

Dans cette partie $\mathscr{D}$ désigne une partie de $\mathbb{R}$, non vide et f et g sont des applications définies sur $\mathscr{D}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- On a la relation d'ordre partielle :

$$f \leqslant g \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in \mathscr{D} \quad f(x) \leqslant g(x)$$

- Une partie A de $\mathbb{R}$ est dite **symétrique** par rapport à $a \in \mathbb{R}$ quand : $x \in \mathrm{A} \Longrightarrow 2a-x \in \mathrm{A}$.
- On dit que f est **paire** (resp. **impaire**) si $\mathscr{D}$ est symétrique par rapport à 0 et

$$\forall x \in \mathscr{D} \quad f(-x)=f(x) \qquad (\text{resp.} \quad \forall x \in \mathscr{D} \quad f(-x)=-f(x))$$

- Lorsque $\mathscr{D}$ est symétrique par rapport à un réel a on a les résultats suivants :
  - La droite $x=a$ est un axe de symétrie du graphe de f si et seulement si la fonction $x \mapsto f(a+x)$ est paire.
  - Le couple $(a,\ b)$ est un centre de symétrie du graphe de f si et seulement si la fonction $x \mapsto f(a+x)-b$ est impaire.
- Si il existe un réel non nul T tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x \in \mathscr{D} \Longleftrightarrow (x+\mathrm{T}) \in \mathscr{D} \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathscr{D} \quad f(x)=f(x+\mathrm{T}).$$

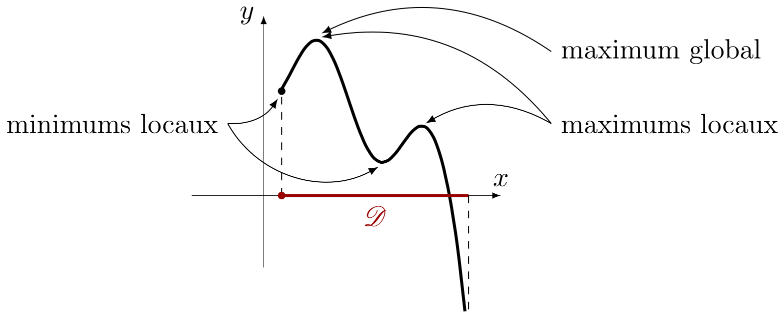
  on dit que f est **T-périodique** ou périodique de période T.
- f est dite **croissante** (resp. **décroissante**) sur $\mathscr{D}$ si

$$\forall (a,\ b) \in \mathscr{D}^2 \quad a \leqslant b \Longrightarrow f(a) \leqslant f(b) \qquad (\text{resp}\ \ \forall (a,\ b) \in \mathscr{D}^2 \quad a \leqslant b \Longrightarrow f(a) \geqslant f(b))$$

- f est dite **stricement croissante** (resp. **décroissante**) sur $\mathscr{D}$ si
$$\forall (a,\ b)\in \mathscr{D}^2 \quad a<b \Longrightarrow f(a)<f(b) \qquad \text{(resp}$$
$\forall (a,\ b)\in \mathscr{D}^2 \quad a<b \Longrightarrow f(a)>f(b))$
- Si f est (strictement) croissante ou décroissante sur $\mathscr{D}$, on dit qu'elle est (strictement) **monotone** sur $\mathscr{D}$. On parle alors de la (stricte) **monotonie** de la fonction.
- Si f est monotone, $-f$ est de monotonie contraire.
- La composée de deux fonctions monotones est monotone (croissante si les fonctions sont de même monotonie, décroissante sinon).
- La somme de deux fonctions croissantes (resp. décroissantes) est croissante (resp. décroissante).
- Si f est monotone et garde un signe constant alors $1/f$ est monotone.

▶▶ **Exercice 7** Soient $x, y \in \mathbb{R}$, montrer : $\dfrac{|x+y|}{1+|x+y|} \leqslant \dfrac{|x|}{1+|x|} + \dfrac{|y|}{1+|y|}$.

- On dit que f est **majorée** (resp. **minorée**, resp. **bornée**) si la partie $f(\mathscr{D})$ est majorée (resp. minorée, resp. bornée).
- La fonction f est bornée si et seulement si $|f|$ est majorée.



- On dit que f admet un **maximum** (resp. un **minimum**) en $a \in \mathscr{D}$ si la partie $f(\mathscr{D})$ admet un maximum (resp. minimum) :
$$\forall x\in \mathscr{D},\ f(x) \leqslant f(a) \qquad (\text{resp } \forall x\in \mathscr{D},\ f(x)\geqslant f(a))$$
On le note $\max\limits_{x\in\mathscr{D}} f = f(a)$ (resp. $\min\limits_{x\in\mathscr{D}} f = f(a)$).
- On dit que f admet un **maximum** (resp. **minimum**) **local** en $a \in \mathscr{D}$ si :
$$\exists \varepsilon>0 \quad \forall x\in\mathscr{D} \qquad |x-a|\leqslant \varepsilon \Longrightarrow f(x)\leqslant f(a) \qquad (\text{resp. } f(x)\geqslant f(a))$$
- On dit que f admet un **extremum** (respectivement un **extremum local**) si f admet un maximum (resp. un maximum local) ou un minimum (resp. un minimum local).

▶▶ **Exercice 8** Soient $f,\ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ impaires. Parité de $f+g$, $f\times g$ et $f\circ g$?

▶▶ **Exercice 9**

1. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction périodique admettant 2 et 3 comme période. Démontrer que f est $1-$périodique.
2. Soit $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction périodique admettant 6 et 21 comme période. De plus $g(1)=1$, $g(2)=2$ et $g(3)=3$ que vaut $g(1000)$?

▶▶ **Exercice 10** Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction paire dont la restriction à $\mathbb{R}_-$ est croissante. Étudier la monotonie de la restriction de f à $\mathbb{R}_+$?

▶▶ **Exercice 11** Trouver toutes les fonctions : $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telles que
$$\forall x\in\mathbb{R}^*,\quad 2f(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)=x^3$$

▶▶ **Exercice 12** Montrer que la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{2\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x+2}\right)$ est définie sur $\mathbb{R}$ et monotone, et donner son sens de monotonie.

▶▶ **Exercice 13** Étudier, sans dériver, la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+\sin x}$.

2 Etude de fonctions

2.1 Continuité et dérivabilité

Dans cette partie I désigne un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, a un réel appartenant à I et f une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- On dit que f est **continue au point** $a \in \mathrm{I}$ si f admet une limite en a (cette limite vaut alors $f(a)$).
- On dit que f est **continue** si elle est continue en tout point $a \in \mathrm{I}$. On note $\mathscr{C}(\mathrm{I},\ \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs réelles.
- **Théorème des valeurs intermédiaires**. Soit f une fonction continue sur un segment $\mathrm{I} = [a, b]$. Pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.
- On appelle taux d'accroissement de f en a la fonction définie sur $\mathrm{I}\setminus\{a\}$ par $\tau_a(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$. Le nombre $\tau_a(x)$ est la pente de la corde (AM) où A et M sont les points de la courbe de f, notée $\mathscr{C}_f$, d'abscisses a et x.
- On dit que f est **dérivable** en a si $\lim\limits_{x\to a} \tau_a(x)$ existe et est finie. On la note alors $f'(a)$.
- On dit que f est **dérivable à gauche** (resp. **à droite**) en a si la limite suivante existe et est finie :

$$f'_g(a) = \lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} \tau_a(x) \qquad \left(\text{resp. } f'_d(a) = \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} \tau_a(x)\right)$$

- Si a n'est pas une extrémité de I, f est dérivable en a si et seulement si f est continue en a et si $f'_d(a)$ et $f'_g(a)$ existent et sont égales, alors $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$.

►► **Exercice 14** Déterminer $a,\ b \in \mathbb{R}$ de sorte que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ soit dérivable :

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{et} \quad f(x) = ax^2 + bx + 1 \text{ si } x > 1$$

- Si f est dérivable en a, alors $f'(a)$ est la pente de la corde limite en A, appelée **tangente** en A à la courbe $\mathscr{C}_f$, dont équation est $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.
- Si f est dérivable en a, elle est continue en a.
- On dit que f est **dérivable** si elle est dérivable en tout point $a \in \mathrm{I}$. On note $\mathcal{D}(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I à valeurs réelles.
- Si $f \in \mathcal{D}(\mathrm{I},\ \mathbb{R})$, la fonction $f' : x \mapsto f'(x)$ est appelée **fonction dérivée de f**.
- Soient $(f,\ g,\ \lambda) \in \mathcal{D}(\mathrm{I},\ \mathbb{R})^2 \times \mathbb{R}$, les fonctions suivantes sont dérivables :

$$(f+g)' = f' + g', \quad (f.g)' = f'.g + gf', \quad (\lambda f)' = \lambda.f'$$

  De plus, si g ne s'annule pas sur I, les fonctions suivantes sont dérivables :

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2} \quad \text{et} \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - gf'}{g^2}$$

- Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ non trivial tel que $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$. Si $f \in \mathcal{D}(\mathrm{I},\ \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{D}(\mathrm{J},\ \mathbb{R})$ alors la fonction composée $(g \circ f)$ est dérivable :

$$(g\circ f)' = f'.(g'\circ f) \qquad \text{ie.} \qquad \forall x \in \mathrm{I} \quad (g\circ f)'(x) = f'(x).(g'\circ f)(x)$$

- Si la fonction $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est dérivable, on admet les résultats suivants :
  - f' est positive (resp. négative) sur I si et seulement si f est croissante (resp. décroissante).
  - f' est nulle sur I si et seulement si f est constante sur I.
  - Si f' est strictement positive (resp. strictement négative) sur I alors f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I, mais la réciproque est fausse.
  - Si a n'est pas une extrémité de I et f admet un extrémum local en a alors $f'(a) = 0$.

  Le fait que l'ensemble de définition de I soit un intervalle est fondamental.
- Les dérivées des fonctions usuelles sont présentées dans le tableau ci-dessous.

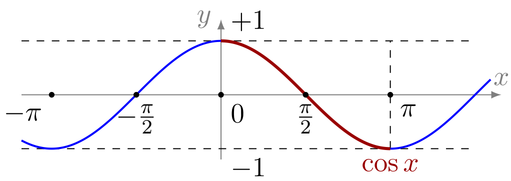
Fonction	Dérivée
x^n	$nx^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z})$
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

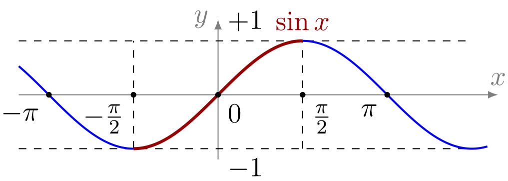
Fonction	Dérivée
u^n	$nu'u^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z})$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{1}{2}\frac{u'}{\sqrt{u}}$
u^α	$\alpha u'u^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
e^u	$u'\mathrm{e}^u$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
$\cos u$	$-u'\sin u$
$\sin u$	$u'\cos u$
$\tan u$	$(1+\tan^2 u)u' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

▶▶ **Exercice 15** ϟ Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \sin x / x$. Établir que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [\,k\pi\,; (k+1)\pi\,]$, on a $|f'(x)| \leqslant 1/k\pi$.

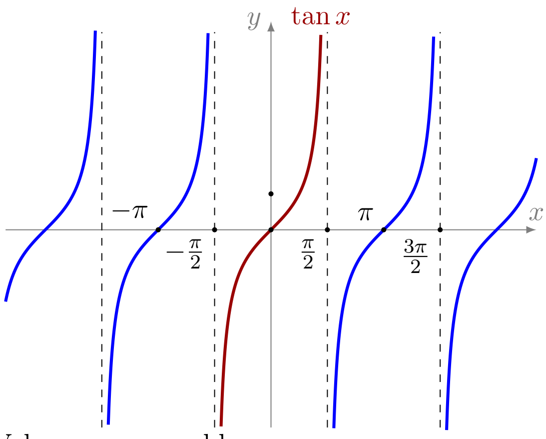
2.2 Fonctions circulaires

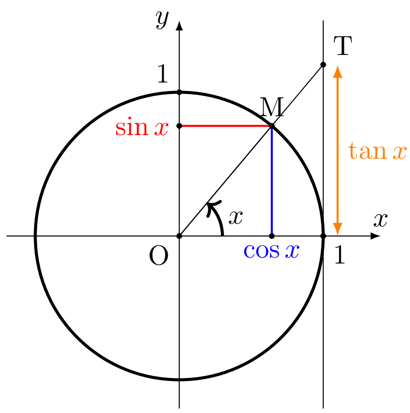
- Les fonctions **sinus** et **cosinus** sont définies et dérivables ($\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$) sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques. La fonction sinus est impaire, la fonction cosinus paire.





- La fonction **tangente** $\tan = \sin / \cos$ est définie et dérivable ($\tan' = 1 + \tan^2 = 1/\cos^2$) sur $]-\pi/2\,;\pi/2\,[+ \pi\mathbb{Z}$. Elle est π-périodique et impaire.





- Valeurs remarquables :

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0
$\tan x$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\times$	0

▶▶ **Exercice 16** Soit $x \neq 0$ tel que $|x| \leqslant \pi/2$. Donner une preuve géométrique de l'encadrement

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

- On a l'inégalité de convexité : $\forall x \in \mathbb{R} \quad |\sin x| \leqslant |x|$

- Transformations affines :

$$
\begin{array}{lll}
\cos(-a) = \cos a & \sin(-a) = -\sin a & \tan(-a) = -\tan a \\
\cos(a+\pi) = -\cos a & \sin(a+\pi) = -\sin a & \tan(a+\pi) = \tan a \\
\cos(\pi - a) = -\cos a & \sin(\pi - a) = \sin a & \tan(\pi - a) = -\tan a \\
\cos(\pi/2 + a) = -\sin a & \sin(\pi/2 + a) = \cos a & \tan(\pi/2 + a) = -1/\tan a \\
\cos(\pi/2 - a) = \sin a & \sin(\pi/2 - a) = \cos a & \tan(\pi/2 - a) = 1/\tan a
\end{array}
$$

- Equations trigonométriques :

$$
\begin{array}{rcl}
\cos x = \cos y & \iff & x \equiv y\,[2\pi] \quad \text{ou} \quad -y\,[2\pi] \\
\sin x = \sin y & \iff & x \equiv y\,[2\pi] \quad \text{ou} \quad \pi - y\,[2\pi] \\
\tan x = \tan y & \iff & x \equiv y\,[\pi]
\end{array}
$$

►► **Exercice 17** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

a. $\sin(5x) = \sin(2\pi/3 + x)$ b. $\sin(2x - \pi/3) = \cos(x/3)$ c. $\cos(3x) = \sin(x)$

2.3 Formulaire de trigonométrie

- **Formules d'addition**

$$
\begin{array}{ll}
\cos(a+b) = \cos a\, \cos b - \sin a\, \sin b & \cos(a-b) = \cos a\, \cos b + \sin a\, \sin b \\
\sin(a+b) = \sin a\, \cos b + \cos a\, \sin b & \sin(a-b) = \sin a\, \cos b - \cos a\, \sin b \\
\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\, \tan b} & \tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a\, \tan b}
\end{array}
$$

►► **Exercice 18** Etablir par un changement de repère les formules de $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$.

►► **Exercice 19** Déduire des formules d'addition et de l'encadrement établi à l'exercice 16, la relation $\cos' = -\sin$.

►► **Exercice 20** Retrouver l'expression de $\sin(a-b)$ en étudiant la fonction définie par $f(x) = \sin(a-b+x)\cos(x) - \cos(a-b+x)\sin(x)$.

►► **Exercice 21** Calculer $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$. Calculer $\cos\dfrac{\pi}{8}$ et $\sin\dfrac{\pi}{8}$.

►► **Exercice 22** A quelle condition sur le réel m l'équation

$$\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) = m$$

a-t-elle une solution réelle ? Résoudre cette équation pour $m = \sqrt{2}$.

- **Angle double**

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$

$$\cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos 2a) \qquad \sin^2 a = \frac{1}{2}(1 - \cos 2a)$$

$$\sin 2a = 2\sin a\, \cos a \qquad \tan 2a = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$$

►► **Exercice 23** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a. $\cos^2 x \geqslant \cos(2x)$ b. $\cos^2 x \leqslant \dfrac{1}{2}$ c. $\cos\dfrac{x}{3} \leqslant \sin\dfrac{x}{3}$

d. $\cos(5x) + \cos(3x) \leqslant \cos(x)$, e. $2\cos^2(x) - 9\cos(x) + 4 > 0$.

►► **Exercice 24** Soit a un réel distinct de $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

1. Calculer $\tan(3\theta)$ en fonction de $\tan\theta$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}=\dfrac{3a-a^3}{1-3a^2}$

- **Transformation de produits en sommes**
  Par sommation ou différence des formules d'addition, on obtient :

$$\begin{aligned}\cos a\cos b &= 1/2\left(\cos(a+b)+\cos(a-b)\right)\\ \sin a\sin b &= 1/2\left(\cos(a-b)-\cos(a+b)\right)\\ \sin a\cos b &= 1/2\left(\sin(a+b)+\sin(a-b)\right)\end{aligned}$$

- **Transformation de sommes en produits**
  En posant $p=a+b$ et $q=a-b$ dans les formules précédentes, on obtient :

$$\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}\qquad \cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$
$$\sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}\qquad \sin p-\sin q=2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

▶▶ **Exercice 25** Retrouver la forme factorisée de $\sin p-\sin q$.

▶▶ **Exercice 26** Démontrer les identités suivantes, en précisant à chaque fois leur domaine de validité :

a. $\dfrac{1-\cos x}{\sin x}=\tan\dfrac{x}{2}$ b. $\sin\left(x-\dfrac{2\pi}{3}\right)+\sin x+\sin\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)=0$

c. $\dfrac{1}{\tan x}-\tan x=\dfrac{2}{\tan(2x)}$ d. $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)+\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)=\dfrac{2}{\cos(2x)}$

▶▶ **Exercice 27** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(2x)-\sqrt{3}\cos(5x)+\cos(8x)=0$.

- **Changement de variable** $t=\tan\dfrac{a}{2}$

$$\cos a=\frac{1-t^2}{1+t^2}\qquad \sin a=\frac{2t}{1+t^2}\qquad \tan a=\frac{2t}{1-t^2}$$

2.4 Fonctions logarithme, exponentielle et puissances

- Le **logarithme népérien**, est l'unique fonction dérivable $\ln:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ telle que $\ln'(x)=1/x$ et $\ln(1)=0$. Elle vérifie pour tous $a,b>0$:

  $\ln(a\times b)=\ln a+\ln b,\quad \ln(1/a)=-\ln a,\quad \ln(a^n)=n\ln a\quad$ (pour tout $n\in\mathbb{Z}$).

- La fonction ln est concave et $\ln x\leqslant x-1$ (pour tout $x>0$). On a les limites :

$$\lim_{x\to 0}x\ln x=0\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0.$$

▶▶ **Exercice 28** A l'aide uniquement des hypothèses $\ln:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$, $\ln'(x)=1/x$ et $\ln(1)=0$, prouver :

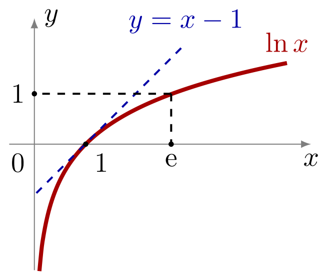
1. Pour tous $a,b>0$ et $n\in\mathbb{N}$ on a $\ln(a\times b)=\ln a+\ln b$, $\ln(1/a)=-\ln a$ et $\ln(a^n)=n\ln a$.
2. La fonction ln est concave et pour tout $x>0$: $\ln x\leqslant x-1$.
3. $\lim\limits_{x\to 0}x\ln x=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)/x=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x/x=0$.

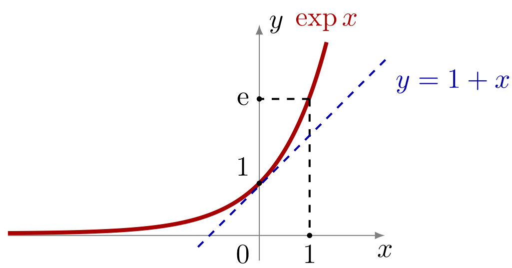
- Pour tout $a\in\mathbb{R}_+^*$, on définit le **logarithme en base** a par $\log_a(x)=\ln(x)/\ln(a)$, de sorte que $\log_a(a)=1$.

▶▶ **Exercice 29** Simplifier les expressions : $x^{\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}}$, $\log_x\left(\log_x x^{x^y}\right)$

- La bijection réciproque de $\ln :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ s'appelle la fonction **exponentielle** :

$$\exp : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x \longmapsto \mathrm{e}^x \end{cases}$$

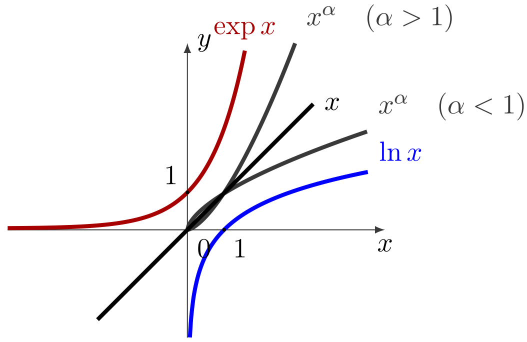




- $\exp(\ln x) = x$ pour tout $x > 0$ et $\ln(\exp x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$ et, pour $n \in \mathbb{Z}$, $\exp(nx) = (\exp x)^n$.
- Elle est continue, strictement croissante, dérivable et vérifie :

$$\lim_{x\to-\infty} \exp x = \lim_{x\to-\infty} x\exp x = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \exp x = \lim_{x\to+\infty} \exp x/x = +\infty$$

- Elle est convexe et $\exp x \geqslant 1 + x$.
- Pour $x > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}^*$, on pose $x^\alpha = \exp\left(\alpha \ln x\right)$. La fonction $x \mapsto \begin{cases} x^\alpha & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est appelée **fonction puissance** α. Quand α entier on étend l'ensemble de définition :
  - Si $\alpha \in \mathbb{N}$, et $x \in \mathbb{R}$, x^α est défini comme le produit de α fois x (on a en particulier $1^0 = 0^0 = 1$).
  - Si $\alpha \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$, et $x \in \mathbb{R}^*$, x^α est défini comme le produit de $|\alpha|$ fois $1/x$.



- Il ne faut pas confondre lorsque $\alpha > 0$ la fonction puisssance $x \mapsto x^\alpha$ avec la fonction exponentielle $x \mapsto \alpha^x = \exp_\alpha x = \exp(x \ln \alpha)$.

►► **Exercice 30** Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'équation : $x^{2/5} + 2x^{3/4} = 3$.

►► **Exercice 31** Déterminer tous les entiers naturels a et b vérifiant $a^b = b^a$.

- Soient $x, y > 0$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a les égalités :

$$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta \qquad x^{-\alpha} = 1/x^\alpha \qquad (xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha \qquad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta} \qquad \ln(x^\alpha) = \alpha \ln x$$

- **Croissances comparées.** Soient $\alpha, \beta > 0$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0 \qquad \lim_{x\to 0} \left(x^\alpha \left|\ln x\right|^\beta\right) = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp \beta x}{x^\alpha} = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} \left(|x|^\alpha \exp\left(\beta x\right)\right) = 0$$

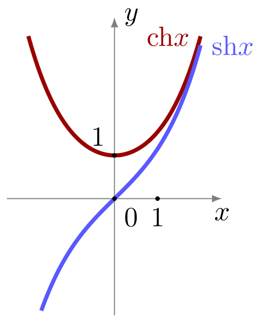
►► **Exercice 32** Démontrer ces limites à l'aide de $(\ln x)/x \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

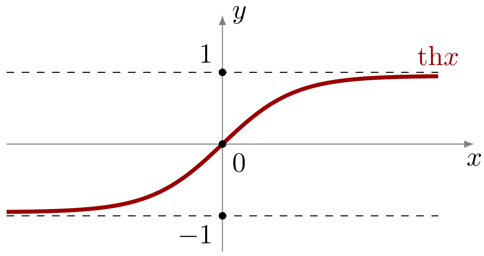
►► **Exercice 33** Déterminer la limite en $+\infty$ des fonctions :

a. $\ln(x) - \mathrm{e}^x$ b. $\dfrac{x^3}{\exp(\sqrt{x})}$ c. $\dfrac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{\sqrt{x}}$ d. $\dfrac{\exp(\sqrt{x})+1}{\exp(x^2)+1}$

2.5 Trigonométrie hyperbolique

- On définit sur $\mathbb{R}$, la fonction **cosinus hyperbolique** par $\operatorname{ch} x = (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})/2$. C'est une fonction continue, paire et dérivable.
- Sa dérivée est la fonction **sinus hyperbolique** : $\operatorname{sh} x = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}/2$. C'est une bijection continue, impaire, dérivable, strictement croissante. Sa dérivée est ch .
- On a les limites : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \operatorname{ch} x = +\infty \quad \lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{sh} x = -\infty \quad \lim_{x\to+\infty} \operatorname{sh} x = +\infty$.





- On définit la fonction **tangente hyperbolique** sur $\mathbb{R}$ par : $\operatorname{th} x = \operatorname{sh} x/\operatorname{ch} x$. La fonction $\operatorname{th} : \mathbb{R} \to]-1\,;1[$ est une bijection continue, impaire, strictement croissante, de dérivée $\operatorname{th}' = 1 - \operatorname{th}^2 = 1/\operatorname{ch}^2$.
- On a les limites : $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{th} x = -1 \quad \lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{th} x = 1$
- Formulaire de trigonométrie hyperbolique. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$:
  - $\operatorname{ch}^2 a - \operatorname{sh}^2 a = 1$
  - $\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \cdot \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \cdot \operatorname{sh} b$
  - $\operatorname{ch}(2a) = \operatorname{ch}^2 a + \operatorname{sh}^2 a$
  - $\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh} a \cdot \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} b \cdot \operatorname{ch} a$
  - $\operatorname{sh}(2a) = 2 \operatorname{sh} a \cdot \operatorname{ch} a$
  - $\operatorname{th}(a+b) = \dfrac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{1 + \operatorname{th} a \cdot \operatorname{th} b}$

▶▶ **Exercice 34** Résoudre l'équation $\operatorname{ch}(x) = 2$.

▶▶ **Exercice 35** 1. Établir les inégalités suivantes pour $x > 0$:

$$\frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x}} < \operatorname{th} x < x < \operatorname{sh} x < \frac{1}{2}\operatorname{sh} 2x$$

2. En déduire que si a et b sont deux réels distincts et strictement positifs, alors

$$\frac{2}{1/a + 1/b} < \sqrt{ab} < \frac{b-a}{\ln b - \ln a} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

2.6 Plan d'étude d'une fonction de la variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$

1. Préciser le domaine de définition $\mathscr{D}$ de f.
2. Étudier la périodicité éventuelle de f. Si il y a T-périodicité, limiter l'étude à un intervalle de longueur T.
3. Étudier la parité ou les symétries éventuelles de f. Si il y a symétrie, limiter l'étude à un intervalle $\mathscr{D} \cap [\,a\,; +\infty\,[$.
4. Étudier la dérivabilité de f et donner ses éventuels domaine de dérivabilité et dérivée.
5. Donner le tableau de variations de f avec les valeurs remarquables, les bornes du domaine, le signe de la dérivée et les points où la dérivée est nulle ou non définie, les limites aux bornes du domaine de définition.
6. Tangentes remarquables :
   - Si la dérivée est nulle alors la courbe admet une tangente horizontale.
   - Si la dérivée ou le taux d'accroissement tend vers $\pm\infty$ en $a \in \mathscr{D}$ (resp. en $a \notin \mathscr{D}$), alors la courbe admet une tangente verticale (resp. asymptote verticale).
   - Si la quantité $f(x) - (ax+b)$ tend vers 0 en $\pm\infty$ alors la courbe admet une asymptote d'équation $y = ax + b$.

- Demi-tangente : obtenue en considérant le cas ou une seule des deux dérivées (à gauche ou à droite) n'existe pas.

7. Tracer la courbe représentative en représentant les axes (fléchés, normés), les tangentes (fléchées) et les asymptotes (non fléchées). Compléter en cas de symétrie ou périodicité.

▶▶ **Exercice 36** Étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos 3x \cos^3 x$.

▶▶ **Exercice 37** Étudier la fonction $f : x \mapsto x + \dfrac{\ln|x|}{|x|}$.

▶▶ **Exercice 38** Démontrer que $(1+x)(\ln(1+x))^2 < x^2$ pour $x > -1$ et $x \neq 0$.

3 Nombres complexes

3.1 Construction et représentation

- On admet l'existence d'un ensemble $\mathbb{C}$ de nombres dits **complexes**, contenant $\mathbb{R}$ et tel que :
  - $\mathbb{C}$ possède une addition et une multiplication, prolongeant celles de $\mathbb{R}$ et vérifiant les mêmes propriétés, c'est à dire :
    1. L'addition est interne, associative, commutative, admet un élément neutre et chaque élément possède un opposé.
    2. La multiplication est interne, associative, commutative, admet un élément neutre et chaque élément différent de 0 possède un inverse.
    3. La multiplication est distributive sur l'addition.
  - Il existe un complexe, que l'on notera i, qui vérifie $\mathrm{i}^2 = -1$.
  - Pour tout complexe $z \in \mathbb{C}$, il existe un unique couple (a, b) de réels tels que $z = a + \mathrm{i}b$.
- Si a, b, c, d sont réels alors
$$(a + \mathrm{i}b)(c + \mathrm{i}d) = ac + \mathrm{i}ad + \mathrm{i}bc + (\mathrm{i})^2 bd = (ad - bc) + \mathrm{i}(ad + bc)$$
- Le réel a est appelé **partie réelle** de z notée $a = \mathrm{Re}\,(z)$, et b la **partie imaginaire** de z, notée $b = \mathrm{Im}\,(z)$. L'écriture $z = a + ib$ est appelée **forme algébrique** de z. L'ensemble des complexes dont la partie réelle est nulle est appelé ensemble des imaginaires purs et noté $\mathrm{i}\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\,(z) = 0\} = \{ib \mid b \in \mathbb{R}\}$.
  - $z = z' \iff \mathrm{Re}\,(z) = \mathrm{Re}\,(z')$ et $\mathrm{Im}\,(z) = \mathrm{Im}\,(z')$
  - $z \in \mathbb{R} \iff \mathrm{Im}\,(z) = 0$ et $z \in \mathrm{i}\mathbb{R} \iff \mathrm{Re}\,(z) = 0$
  - $\mathrm{Re}\,(z + z') = \mathrm{Re}\,(z) + \mathrm{Re}\,(z')$ et $\mathrm{Im}\,(z + z') = \mathrm{Im}\,(z) + \mathrm{Im}\,(z')$
  - $\mathrm{Re}\,(zz') = \mathrm{Re}\,(z)\,\mathrm{Re}\,(z') - \mathrm{Im}\,(z)\,\mathrm{Im}\,(z')$
  - $\mathrm{Im}\,(zz') = \mathrm{Re}\,(z)\,\mathrm{Im}\,(z') + \mathrm{Im}\,(z)\,\mathrm{Re}\,(z')$
- Soit $z = a + ib$ un complexe sous **forme algébrique**, on appelle **conjugué** de z le complexe noté $\overline{z}$ défini par $\overline{z} = a - ib$.
  - $\mathrm{Re}\ z = \mathrm{Re}\ \overline{z}$
  - $\mathrm{Im}\ z = -\mathrm{Im}\ \overline{z}$
  - $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
  - $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
  - $\forall n \in \mathbb{N} \quad \overline{z^n} = \overline{z}^n$
  - $\mathrm{Re}\,(z) = (z + \overline{z})/2$
  - $\mathrm{Im}\,(z) = (z - \overline{z})/2\mathrm{i}$
  - $z\overline{z} = (\mathrm{Re}\ z)^2 + (\mathrm{Im}\ z)^2$
  - Si $z \neq 0$, $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \dfrac{a - ib}{a^2 + b^2}$
- Si a, b sont des nombres complexes et a est non nul alors pour tout $z \in \mathbb{C}$:
$$az = b \iff a^{-1}aaz = a^{-1}b \iff z = a^{-1}b \iff z = \frac{\overline{a}b}{|a|^2}$$
- A tout complexe $z = x + \mathrm{i}y$ on associe de façon unique le point du plan noté $\mathrm{M}(z)$ de coordonnées (x, y). On dit que $\mathrm{M}(z)$ (resp. $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$) est l'**image** (resp. vecteur image) de z et que z est l'**affixe** de M (ou de $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$).
- Soient z et z' deux complexes distincts, d'images $\mathrm{M}(z)$ et $\mathrm{M}'(z')$. L'affixe du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{MM}'}$ est $z' - z$. L'affixe du milieu de $[\mathrm{MM}']$ est $(z + z')/2$.

▶▶ **Exercice 39** Montrer que les milieux d'un quadrilatère quelconque forment un parallélogramme.

- On appelle **module** de $z \in \mathbb{C}$ le réel positif $\sqrt{z\overline{z}}$ et on le note $|z|$.
  - Si $z = a + ib$ on a $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
  - $|z|^2 = z\overline{z}$.
  - $|z| = 0 \iff z = 0$.
  - $|\operatorname{Re}(z)| \leqslant |z|$ et $|\operatorname{Im}(z)| \leqslant |z|$.
  - $|z| = z \iff z \in \mathbb{R}_+$.
  - $|z| = |-z| = |\overline{z}|$.
  - Si z est réel alors son module coïncide avec sa valeur absolue.
  - $|zz'| = |z||z'|$, en particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z|^n = |z^n|$. Si $z \neq 0$ $|z'/z| = |z'|/|z|$.

▶▶ **Exercice 40** Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, montrer que $|z + z'|^2 \leqslant (1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)$, et étudier le cas d'égalité.

- Soient ω et z deux complexes distincts, d'images respectives Ω et M. Soit ε un réel strictement positif.
  - $|z - \omega|$ est la distance ΩM.
  - Les solutions de l'équation $|z - \omega| = \varepsilon$ (resp. $|z - \omega| \leqslant \varepsilon$, resp. $|z - \omega| < \varepsilon$) sont exactement les points du cercle (resp. du disque fermé, resp. du disque ouvert) de centre Ω et de rayon ε.
  - Soit z et z' deux complexes non nuls et distincts, d'images M et M'. Il existe un unique point M$''$ tel que MOM$'$M$''$ soit un parallélogramme (non croisé). Alors $z'' = z + z'$ est l'affixe de M$''$, c'est à dire du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}''}$ et $z' - z$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{MM}'}$. $|z+z'|$ et $|z'-z|$ sont les longueurs des diagonales du parallélogramme.

▶▶ **Exercice 41** Soient l'application $f : z \mapsto -z\dfrac{1-\overline{z}}{1-z}$ et $\mathrm{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ l'ensemble des affixes du disque ouvert unité. Montrer que si $z \in \mathrm{D}$ alors $f(z) \in \mathrm{D}$ et $f(f(z)) = z$.

▶▶ **Exercice 42** 🎓 (Identité du parallélogramme)
Montrer que dans un parallélogramme la somme des carrés des longueurs est la même pour les côtés et pour les diagonales.

- **Inégalités triangulaires**

Soient z et z' deux nombres complexes :

$$\boxed{||z| - |z'|| \leqslant |z + z'| \leqslant |z| + |z'|}$$

$$\forall z, z' \in \mathbb{C} \quad |z + z'| = |z| + |z'| \quad \iff \quad z = 0 \quad \text{ou} \quad \exists \lambda \in \mathbb{R}_+ \quad z' = \lambda z$$

▶▶ **Exercice 43** ✎ ϟ Démontrer l'inégalité triangulaire et son cas d'égalité.

▶▶ **Exercice 44** Montrer que pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ on a $|1 + a| + |a + b| + |b + c| + |c| \geqslant 1$

▶▶ **Exercice 45** Montrer : $|z - (1 + i)| \leqslant 1 \Longrightarrow \sqrt{10} - 1 \leqslant |z - 4| \leqslant \sqrt{10} + 1$. Interprétation géométrique ?

▶▶ **Exercice 46** ✎ Soient $z_1, \dots, z_n$ des nombres complexes tous non nuls. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $|z_1 + \cdots + z_n| = |z_1| + \cdots + |z_n|$.

3.2 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

- On appelle **groupe unité de** $\mathbb{C}$ et on note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module égal à 1 : $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.
  - $\mathbb{U}$ est stable par multiplication, inversion et conjugaison. Si z et z' sont dans $\mathbb{U}$, il en est de même de $1/z$, $\overline{z}$, zz', z/z', et de z^n, pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
  - Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ on a $z \in \mathbb{U} \iff \dfrac{1}{z} = \overline{z}$.

- Soit $z \in \mathbb{U}$, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Re} z = \cos\theta$ et $\operatorname{Im} z = \sin\theta$, plus précisément on a $\mathbb{U} = \{\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\}$. L'ensemble des images des éléments de $\mathbb{U}$ est le cercle unité (d'origine O et de rayon 1) du pland complexe $\mathscr{P}$.
- Soit $z \in \mathbb{U}$. Tout nombre réel θ tel que $z = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ est appelé **un argument de** z. L'ensemble des arguments de z est appelé **l'argument** de z et est noté $\arg(z) \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$. Si θ est un argument de z alors on peut écrire :

$$\arg(z) = (\theta + 2\pi\mathbb{Z}) = \{\theta + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

- Soit $z \in \mathbb{U}$ et $\theta \in \arg(z)$. Il existe un unique argument de z dans l'intervalle $]-\pi\,;\pi\,]$, cet argument est appelé **argument principal** de z et est noté $\operatorname{Arg}(z)$.
- Soit $z \in \mathbb{U}$ et $\mathrm{M}(z)$ le point du plan d'affixe z. L'argument principal de z est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\mathrm{OM}})$, ce que l'on écrit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\mathrm{OM}}) \equiv \operatorname{Arg}(z)[2\pi]$.

▶▶ Exercice 47

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et z un complexe de module 1. Montrer : $\dfrac{1+\alpha}{2}|z-1| \leqslant |z-\alpha|$.

- Pour tout réel θ le complexe $\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ est noté $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Ainsi on a $\mathbb{U} = \left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\right\}$.
- Pour tous $\theta,\ \theta' \in \mathbb{R}$

$$\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}, \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')}, \qquad \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\theta')}, \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} \Longleftrightarrow \theta \equiv \theta'\ [2\pi]$$

- **Formules d'Euler.** Pour tout réel x :

$$\cos x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}$$

- Cette formule est utilisée pour linéariser les puissances de fonctions sin et cos.
- Calculons une primitive de $\sin^3 x$ en linéarisant :

$$\begin{aligned}\sin^3 x &= \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right)^3 = \frac{\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} + 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + 3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}}{-8\mathrm{i}} \\ &= -\frac{1}{4}\left(\frac{\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right) - \frac{3}{4}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right) = -\frac{1}{4}\sin(3x) - \frac{3}{4}\sin(x)\end{aligned}$$

D'où
$$\int^x \sin^3 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{12}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos x$$

▶▶ Exercice 48 (Factorisation par l'angle moitié) Factoriser $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}$ et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}$.

▶▶ Exercice 49 Retrouver l'expression de $\cos(a-b)$ à l'aide des propriétés de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}$ et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}b}$.

▶▶ Exercice 50 Soit z un nombre complexe de module 1, montrer que $|1+z| \geqslant 1$ ou $\left|1+z^2\right| \geqslant 1$.

▶▶ Exercice 51

Soient $a, b, z \in \mathbb{U}$ distincts. Montrer : $\dfrac{b}{a}\left(\dfrac{z-a}{z-b}\right)^2 \in \mathbb{R}_+^*$.

▶▶ Exercice 52 A l'aide de d'une formule d'Euler, linéariser $\cos^4(x)$.

- **Formules de Moivre**. Pour tout réel x et tout entier naturel n :

$$\cos(nx) = \operatorname{Re}\left((\cos x + \mathrm{i}\sin x)^n\right) \qquad \text{et} \qquad \sin(nx) = \operatorname{Im}\left((\cos x + \mathrm{i}\sin x)^n\right)$$

- Cette formule est utilisée pour écrire $\cos(nx)$ ou $\sin(nx)$ sous forme de polynômes en $\cos x$ ou $\sin x$.
- $\cos 3\theta = \operatorname{Re}\left((\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^3\right) = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$.

▶▶ Exercice 53 A l'aide d'une formule de Moivre, écrire $\sin 5\theta / \sin\theta$ à l'aide de puissances de $\cos\theta$. En déduire la valeur de $\sin(2\pi/5)$.

- Soit z un complexe non nul, on appelle **argument** de z tout réel θ tel que $z=|z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Cette égalité est appelée **forme trigonométrique** (ou polaire) de z. L'ensemble des arguments de z est noté $\arg(z)$, on a donc $\arg(z)=\left\{\theta\in\mathbb{R}\mid z=|z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right\}$. Si θ est un argument de z, alors

$$\arg(z)=(\theta+2\pi\mathbb{Z})=\{\theta+2k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}\,.$$

- Soit $z\in\mathbb{C}^*$, il existe un unique argument de z dans l'intervalle $]-\pi\,;\pi\,]$, il est appelé **argument principal** de z et est noté $\operatorname{Arg}(z)$. On a alors $z=|z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\operatorname{Arg}(z)}$ et $\arg(z)=(\operatorname{Arg}(z)+2\pi\mathbb{Z})$. Soient $z,\ z'\in\mathbb{C}^*$:
  - $z=z'\iff|z|=|z'|$ et $Arg(z)=\operatorname{Arg}(z')$
  - $z\in\mathbb{R}_+^*\iff\operatorname{Arg}(z)=0,\quad z\in\mathbb{R}_-^*\iff\operatorname{Arg}(z)=\pi$.
  - $\overline{z}=|z|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\operatorname{Arg}(z)}$, donc $\operatorname{Arg}(\overline{z})=-\operatorname{Arg}(z)$.
  - $-z=|z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\operatorname{Arg}(z)+\pi)}$, donc $\operatorname{Arg}(-z)\equiv\operatorname{Arg}(z)+\pi\ [2\pi]$.
  - $zz'=|z||z'|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\operatorname{Arg}(z)+\operatorname{Arg}(z)'}$, donc $\operatorname{Arg}(zz')\equiv\operatorname{Arg}(z)+\operatorname{Arg}(z)'\ [2\pi]$.
  - Si $z'\neq0$, $z/z'=|z|/|z'|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\operatorname{Arg}(z)-\operatorname{Arg}(z')}$, donc $\operatorname{Arg}(z/z')\equiv\operatorname{Arg}(z)-\operatorname{Arg}(z')\ [2\pi]$.
  - Pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $z^n=|z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n\operatorname{Arg}(z)}$, donc $\operatorname{Arg}(z^n)\equiv n\operatorname{Arg}(z)\ [2\pi]$.
- Soit z un complexe non nul et $\mathrm{M}(z)$ le point du plan d'affixe z. L'argument principal de z est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{\mathrm{OM}})$, ce que l'on écrit $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{\mathrm{OM}})\equiv\operatorname{Arg}(z)\ [2\pi]$

- **Formule d'un angle orienté.** Soient A, B, C trois points distincts d'affixes respectives a,b,c. Alors

$$(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AC}})\equiv\operatorname{Arg}\left(\frac{c-a}{b-a}\right)\ [2\pi]$$

- Les points A,B et C sont **alignés** si et seulement si le nombre $(c-a)/(b-a)$ est réel.
- Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ sont **orthogonaux** si et seulement si $(c-a)/(b-a)$ est imaginaire pur.

►► **Exercice 54** (🎓 Théorème de Von Aubel).
On considère un quadrilatère ABCD de sens direct. On construit 4 carrés $\mathrm{C}_1,\mathrm{C}_2,\mathrm{C}_3$ et C_4 de centres respectifs $\mathrm{P},\mathrm{Q},\mathrm{R}$ et S qui s'appuient extérieurement sur les côtés $[\mathrm{AB}],[\mathrm{BC}],[\mathrm{CD}]$ et $[\mathrm{DA}]$du quadrilatère ABCD. Démontrer que les diagonales de PQRS sont perpendiculaires et de mêmes longueurs.

►► **Exercice 55**

1. Soit Z et u dans $\mathbb{C}$. Montrer (par un calcul) que : $(\mathrm{Z}-u)/(\mathrm{Z}+u)\in\mathrm{i}\mathbb{R}\iff|\mathrm{Z}|=|u|$
2. Soient A et B deux points d'affixe a et b. Montrer qu'un point d'affixe z est sur le cercle de diamètre [AB] si et seulement si $z-a/z-b\in\mathrm{i}\mathbb{R}$. Interprétation géométrique ?

►► **Exercice 56** ϟ Soit $z\in\mathbb{C}$. On considère les points d'affixes z, z^2, z^3 et le triangle qu'ils forment lorsqu'ils ne sont pas alignés. Préciser les z tels que :

1. Les points soient distincts et alignés.
2. Le triangle est rectangle.
3. Le point d'affixe 0 est l'orthocentre du triangle.

3.3 Équations dans $\mathbb{C}$

- Soit n un entier non nul, l'équation $z^n=1$ possède exactement n solutions qui sont les complexes $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/n}$ avec $0\leqslant k\leqslant n-1$. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble de ces solutions, on l'appelle le **groupe des racines n-ièmes de l'unité**. En notant $\omega=\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/n}$, on a

$$\mathbb{U}_n=\{z\in\mathbb{U}\mid z^n=1\}=\left\{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/n}\mid 0\leqslant k\leqslant n-1\right\}=\left\{1,\ \omega,\ \omega^2,\ldots,\ \omega^{n-1}\right\}.$$

  - $\mathbb{U}_2=\{1,-1\}$.

- $\mathbb{U}_3 = \{1,\ j,\ j^2\}$ où $j = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$. On note que $j^2 = \overline{j}$ et $1 + j + j^2 = 0$.
- $\mathbb{U}_4 = \{1, \mathrm{i}, -\mathrm{i}, -1\}$
- Les points images des racines n-ièmes de l'unité forment les n sommets d'un polygone régulier convexe inscrit dans le cercle unité, l'un de ces sommets est le point d'affixe 1.
- Si $z \in \mathbb{U}_n$, alors $\overline{z} \in \mathbb{U}_n$.
- $\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{2ik\pi/n} = 0$, la somme des racines n-ièmes de l'unité est nulle.
- Les racines de l'équation $1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = 0$ sont exactement les racines n-ièmes de l'unité privées de 1.

▶▶ **Exercice 57** Justifier ces résultats.

▶▶ **Exercice 58** Résoudre dans $\mathbb{C}$: $\left(\dfrac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right)^3 + \left(\dfrac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right)^2 + \left(\dfrac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right) + 1 = 0.$

- Soit $a \in \mathbb{C}^*$. Les racines n-ièmes de a sont les solutions complexes de l'équation : $z^n = a$.
- Soit $a = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$. Alors a possède n **racines n-ièmes**, données par :

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi_k},\ \text{où}\ \varphi_k = \frac{\theta}{n} + 2k\frac{\pi}{n},\ \text{avec}\ 0 \leqslant k \leqslant n-1.$$

▶▶ **Exercice 59** Justifier ce résultat.

- Soit $\mathrm{Z} \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Si on connait une solution z_0 de l'équation $z^n = a$, l'ensemble des solutions est :

$$\{uz_0 \mid u \in \mathbb{U}_n\} = \left\{z_0\,\omega^k \mid 0 \leqslant k \leqslant n-1\right\}, \quad \text{où}\ \omega = \mathrm{e}^{2i\pi/n}.$$

- Exemple : solutions de $z^4 = (2-3\mathrm{i})^4$. On a une solution évidente $z_0 = 2 - 3\mathrm{i}$ donc les solutions sont $\{z_0 : \mathrm{i}z_0, -z_0, -\mathrm{i}z_0\} = 2 - 3\mathrm{i}, 3 + 2\mathrm{i}, -2 + 3\mathrm{i}, -3 - 2\mathrm{i}$.

▶▶ **Exercice 60** Résoudre les équations suivantes :

a. $\mathrm{i}z^8 + \mathrm{i}z^4 + 1 + \mathrm{i} = 0$	b. $z^n = \bar{z}\ (n \geqslant 2)$
c. $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$	d. $1 + 2z + \cdots + 2z^{n-1} + z^n = 0$

- Soit $z = x + \mathrm{i}y$ un nombre complexe, on appelle **exponentielle** de z le complexe défini par

$$\exp(z) = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,y} = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$$

- Si z est réel ou imaginaire pur, cette définition correspond aux fonctions exponentielles déjà connues. On gardera donc la notation habituelle e^z plutôt que $exp(z)$.
- Pour tout $z \in \mathbb{C}$:
  - $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}\,(z)}$ et $\mathrm{Arg}\,(\mathrm{e}^z) \equiv \mathrm{Im}\,(z)\ [2\pi]$
  - $\mathrm{e}^z \neq 0$ et $(\mathrm{e}^z)^{-1} = \mathrm{e}^{-z}$.
  - $(\mathrm{e}^{\overline{z}}) = \overline{\mathrm{e}^z}$.
  - Pour tout $z' \in \mathbb{C}$, $\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^z\mathrm{e}^{z'}$.
- Tout nombre complexe a non nul est l'image par l'exponentielle complexe d'au moins un complexe z_0. Ses antécédents sont $\{z_0 + 2\mathrm{i}k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

▶▶ **Exercice 61** Justifier ce résultat.

- La fonction exponentielle complexe est $2i\pi$-périodique.
- La fonction exponentielle n'est donc pas bijective, ce qui empêche de définir, comme sur $\mathbb{R}$, une fonction logarithme.
- Comme tout nombre complexe non nul admet un argument principal unique dans l'intervalle $]-\pi\,;\pi\,]$, la fonction exponentielle est une bijection de $\{z \in \mathbb{C} |\ \mathrm{Im}\,(z) \in\,]-\pi\,;\pi\,]\}$ sur $\mathbb{C}^*$. Sa fonction réciproque est un logarithme complexe (on pourrait en choisir d'autres !).
- On appelle **racine carrée** d'un complexe z, tout complexe dont le carré vaut z.

- Si $z \notin \mathbb{R}_+$, la notation $\sqrt{z}$ n'a aucun sens.
- Tout complexe non nul admet 2 racines carrées opposées.

▶▶ **Exercice 62** Déterminer les racines carrées de $1, \mathrm{i}, 1-\mathrm{i}\sqrt{3}$.

- Pour résoudre $z^2 = \mathrm{Z}$ à l'aide de la forme algébrique on utilise la partie réelle le module et le signe de la partie imaginaire. En posant $\mathrm{Z} = a + ib$ et $z = x + \mathrm{i}y$:

$$(x+\mathrm{i}y)^2 = a+\mathrm{i}b \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2 = a \\ 2xy = b \\ x^2+y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 = (\sqrt{a^2+b^2}+a)/2 \\ y^2 = (\sqrt{a^2+b^2}-a)/2 \\ \operatorname{sgn}(xy) = \operatorname{sgn}(b) \end{cases}$$

▶▶ **Exercice 63** Calculer les racines carrées de $3+4\mathrm{i}, 8-6\mathrm{i}$, et $7+24\mathrm{i}$.

- Soient $(a,\ b,\ c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$, on a la forme canonique :

$$az^2+bz+c = a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \qquad \text{où} \qquad \Delta = b^2-4ac$$

- Nommons δ et $-\delta$ les racines carrées de $\Delta = b^2-4ac$. L'équation $az^2+bz+c = 0$ admet, dans $\mathbb{C}$, deux solutions qui sont :

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}.$$

  - $z_1 = z_2$ si et seulement si $\Delta = 0$.
  - Si les coefficients sont réels on rencontre trois cas :
    1. $\Delta > 0$ alors $\delta = \sqrt{\Delta}$ convient.
    2. $\Delta = 0$ alors on a une racine double $\dfrac{-b}{2a}$.
    3. $\Delta < 0$ alors $\delta = \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}$ convient. Dans ce cas, les deux solutions sont complexes conjuguées.
  - Dans le cas général les solution ne sont pas conjuguées.

▶▶ **Exercice 64** Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z(2z+1)(z-2)(2z-3) = 63$.

▶▶ **Exercice 65** Résoudre $z^2+(3-\mathrm{i})z+(4-3\mathrm{i}) = 0$.

▶▶ **Exercice 66** Résoudre : $z^2-2\mathrm{i}z-1+2\mathrm{i} = 0$ et $z^4-(5-14\mathrm{i})z^2-2(12+5\mathrm{i}) = 0$.

▶▶ **Exercice 67** L'équation $z^4+6z^2-\mathrm{i}z+3-\mathrm{i} = 0$ d'inconnue z admet-elle une solution réelle ?
L'équation $z^3+(5+2\mathrm{i})z^2+7(1+\mathrm{i})z+2(1+3\mathrm{i}) = 0$ d'inconnue z admet-elle une solution réelle ? Trouver les racines dans $\mathrm{i}\mathbb{R}$ de $z^4+6z^3+17z^2+24z+52 = 0$.

▶▶ **Exercice 68** Résoudre l'équation $4\mathrm{i}z^3+2(1+3\mathrm{i})z^2-(5+4\mathrm{i})z+3(1-7\mathrm{i}) = 0$, sachant qu'elle admet une racine réelle.

3.4 Transformations du plan et nombres complexes

- Soit g une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ (définie éventuellement sur une partie de $\mathbb{C}$.) Il lui correspond de façon unique l'application h du plan dans lui-même, qui au point M d'affixe z associe le point M′ d'affixe $z' = g(z)$. L'application $h : \mathrm{M}(z) \mapsto \mathrm{M}'(z')$ est appelée une **transformation du plan**.

▶▶ **Exercice 69** Donner les images du cercle unité par les homographies : $z \mapsto \dfrac{z+4}{z-1}$, $z \mapsto \dfrac{z-1}{z-5}$.

- Soit un réel $k > 0$. On appelle **similitude plane** de rapport k, une transformation du plan telle que pour tous points M, N on ait $f(\mathrm{M})f(\mathrm{N}) = k\mathrm{MN}$. Si $k = 1$, c'est une **isométrie**.
- L'application $h : \mathrm{M}(z) \mapsto \mathrm{M}'(z' = z + a)$ où $a \in \mathbb{C}$) est la translation de vecteur le vecteur image de a.
- L'application $h : \mathrm{M}(z) \mapsto \mathrm{M}'(z' = -z)$ est la symétrie par rapport au point O.
- Plus généralement l'application $h : \mathrm{M}(z) \mapsto \mathrm{M}'(z' = 2\omega - z)$ est la symétrie par rapport au point $\Omega(\omega)$.
- L'application $h : \mathrm{M}(z) \mapsto \mathrm{M}'(z' = \overline{z})$ est la symétrie axiale d'axe $(\mathrm{O}x)$.
- L'application $h : \mathrm{M}(z) \mapsto \mathrm{M}'(z' = -\overline{z})$ est la symétrie axiale d'axe $(\mathrm{O}y)$.
- L'application $h : \mathrm{M}(z) \mapsto \mathrm{M}'(z' = iz)$ est la rotation de centre O et d'angle $\pi/2$.
- L'application $h : \mathrm{M}(z) \mapsto \mathrm{M}'(z' = -iz)$ est la rotation de centre O et d'angle $-\pi/2$.
- L'application $h : \mathrm{M}(z) \mapsto \mathrm{M}'(z' = \omega + e^{i\alpha}(z - \omega))$ est la rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle α.
- L'application $h : \mathrm{M}(z) \mapsto \mathrm{M}'(z' = \lambda z)$ avec λ réel est l'homothétie de centre O et de rapport λ.
- L'application $h : \mathrm{M}(z) \mapsto \mathrm{M}'(z' = \omega + \lambda(z - \omega))$ avec λ réel est l'homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport λ.
- Les similitudes planes sont exactement les applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme $z \mapsto az + b$ **(similitudes directes)** ou $z \mapsto a\overline{z} + b$ **(similitudes indirectes)**, où $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, avec $a \neq 0$. Les isométries sont les similitudes telles que $|a| = 1$.
- $|s(z) - s(z')| = |(az + b) - (az' + b)| = |a(z - z')| = |a|\,|z - z'|$ ce qui prouve la condition nécessaire et suffisante pour l'isométrie.
- Une similitude directe est une bijection du plan. Elle conserve les angles orientés et les rapports des distances. Elle transforme une droite en une droite et un cercle en un cercle.

▶▶ **Exercice 70** Justifier ce dernier point.

- Si $a \neq 1$. La similitude directe $z \mapsto az + b$ possède un unique point fixe Ω d'affixe $\omega = \dfrac{b}{1 - a}$. Elle est la composée de l'homothétie de centre Ω et de rapport ρ et de la rotation de centre Ω et d'angle θ. Ces deux transformations étant commutatives, leur ordre est sans importance.

▶▶ **Exercice 71** Justifier ce résultat.

▶▶ **Exercice 72** Soit $f : z \mapsto \dfrac{3 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{4} z + \dfrac{1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{4}$.

1. Décomposer f sous forme de rotation et homothétie. On notera ω l'unique point fixe de f.
2. Démontrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, le triangle $\Omega(\omega)\mathrm{M}(z)\mathrm{M}'(f(z))$ est rectangle en M'.

▶▶ **Exercice 73** Considérons la similitude directe de centre $1 + 2\mathrm{i}$, de rapport $\sqrt{2}$, d'angle $3\pi/4$.

1. Donner son écriture complexe.
2. Déterminer l'image de la droite d'équation $x + y = 1$ par la similitude.
3. Déterminer l'image du cercle de centre $1 - \mathrm{i}$ et de rayon 2.

- Soient A, B, A′ et B′ quatre points donnés tels que $\mathrm{A} \neq \mathrm{B}$ et $\mathrm{A}' \neq \mathrm{B}'$ alors il existe une unique similitude plane directe f telle que $f(\mathrm{A}) = \mathrm{A}'$ et $f(\mathrm{B}) = \mathrm{B}'$.

▶▶ **Exercice 74** Justifier ce résultat.

▶▶ **Exercice 75** Soit ABC un triangle non aplati du plan $\mathscr{P}$. On désigne par $\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2, \mathrm{S}_3$ les similitudes directes de centres respectifs A, B, C telles que $\mathrm{S}_1(\mathrm{B}) = \mathrm{C}$, $\mathrm{S}_2(\mathrm{C}) = \mathrm{A}$ et $\mathrm{S}_3(\mathrm{A}) = \mathrm{B}$. Décrire les composées $\mathrm{S}_3 \circ \mathrm{S}_2 \circ \mathrm{S}_1$ et $\mathrm{S}_1 \circ \mathrm{S}_2 \circ \mathrm{S}_3$.

▶▶ Exercice 76 ϟ
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer les similitudes planes directes qui transforment 0 en 1 et $-\mathrm{i}$ en λ. Déterminer l'ensemble décrit par le centre de ces similitudes lorsque λ décrit $\mathbb{R}$. (On pourra poser $\lambda = 1 + \tan\theta$.)

3.5 Fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{C}$

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ une fonction définie sur I à valeurs complexes.

- Les fonctions **partie réelle**, **partie imaginaire**, **module** et **conjuguée** de f sont définies par

$$\mathrm{Re}\, f : \begin{cases} \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \mathrm{Re}\,(f(t)) \end{cases} \quad \mathrm{Im}\, f : \begin{cases} \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \mathrm{Im}\,(f(t)) \end{cases} \quad |f| : \begin{cases} \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto |(f(t)| \end{cases} \quad \overline{f} : \begin{cases} \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{C} \\ t \longmapsto \overline{f(t)} \end{cases}$$

  On a ainsi $f = \mathrm{Re}\ f + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}\ f$ et $|f|^2 = (\mathrm{Re}\ f)^2 + (\mathrm{Im}\ f)^2 = f\overline{f}$.
- On dit que f est dérivable sur I si ses parties réelles et imaginaires sont dérivables sur I. Alors $f' = (\mathrm{Re}\ f)' + \mathrm{i}(\mathrm{Im}\ f)'$. On note $\mathcal{D}(\mathrm{I},\ \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions définies sur I, à valeurs complexes et dérivables.
- Pour tous $(\lambda,\ \mu) \in \mathbb{C}^2$ et $(f,\ g) \in \mathcal{D}(\mathrm{I},\ \mathbb{C})^2$ alors :
  - $(\lambda f + \mu g) \in \mathcal{D}(\mathrm{I},\ \mathbb{C})$ et $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$ (linéarité de la dérivation).
  - $(fg) \in \mathcal{D}(\mathrm{I},\ \mathbb{C})$ et $(fg)' = f'g + gf'$.
  - Si g ne s'annule pas sur I, $f/g \in \mathcal{D}(\mathrm{I},\ \mathbb{C})$ et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$
- Si $\mathrm{J} \subset f(\mathrm{I})$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, $f \in \mathcal{D}(\mathrm{I},\ \mathbb{C})$ et $g \in \mathcal{D}(\mathrm{J},\ \mathbb{C})$ alors $(g \circ f)' = f'.(g' \circ f)$.
- Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathrm{I},\ \mathbb{C})$, la fonction e^{φ} est dérivable sur I et $(e^{\varphi})' = \varphi' e^{\varphi}$.

4 Calculs algébriques

4.1 Fonctions polynomiales

- Deux fonctions polynômiales sont égales si et seulement si leurs coefficients sont égaux.
- Deux fonctions polynomiales qui prennent les mêmes valeurs en une infinité de points sont égales.
- La forme canonique d'un polynôme réel de degré deux est la forme la plus utile en analyse (elle sert aux études d'extrémums, de signe, à l'intégration) :

$$ax^2 + bx + c = a\,(x + b/2a)^2 + (c - b^2/4a)$$

- Un nombre a est une racine d'un polynôme P si et seulement si on peut factoriser $\mathrm{P}(z)$ par $(z - a)$.
- Les racines non réelles d'un polynôme à coefficients réels sont conjuguées deux à deux.
- Un polynôme complexe de degré n possède au plus n racines complexes (il en possède exactement n si on les compte avec leur multiplicité).
- *Relations coefficients racines.* La somme des racines de $ax^2 + bx + c$ est égale à $-b/a$, leur produit vaut c/a.
- Réciproquement les solutions du système $\begin{cases} x + y = s \\ xy = p \end{cases}$ sont les racines de $x^2 - sx + p$.

▶▶ Exercice 77 Mettre sous forme canonique et factorisée (si possible) :

a. $x^2 - 7x - 44$ b. $x^2 + 8x - 65$ c. $x^2 - 11x + 55$ d. $3x^2 + 14x - 5$
e. $15x^2 - 28x - 11$ f. $4x^2 + 7x + 12$ g. $30x^2 - 3x - 6$

▶▶ Exercice 78 Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$, le nombre $n^4 + 4$ est-il pas premier ?

▶▶ Exercice 79 Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système $\begin{cases} x + y = 1 + \mathrm{i} \\ xy = 2 - \mathrm{i} \end{cases}$

►► **Exercice 80** Soient z_1 et z_2 les racines de $z^2 - z + 4$, calculer $z_1^2 + z_2^2 - z_1 z_2$.

►► **Exercice 81** Soit $a \in \mathbb{C}$ et m, m' les racines de l'équation $z^2 - 2az - 2 - 2\mathrm{i} = 0$.

1. Déterminer l'ensemble des a pour lesquels la droite (mm') est de pente 1.
2. Déterminer l'ensemble des a pour lesquels l'angle $m\mathrm{O}m'$ est droit.

4.2 Polynômes de degré 2 à deux variables

- Une fonction polynômiale réelle de degré 2 à deux variables est définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$$

- Ses **lignes de niveau**, c'est-à-dire les ensembles de points (x,y) tels que $f(x,y) = \ell$ où ℓ est une constante réelle, sont des coniques (hyperboles, ellipses ou paraboles).
- La **réduction de Gauss** consiste à à écrire le polynôme comme somme de carrés, et permet d'étudier les extrémums de la fonction et la nature de ses lignes de niveau.
- Exemples :
  - $f(x,y) = x^2+6xy+2x-3y+1 = x^2+2x(3y+1)-3y+1 = (x+(3y+1))^2-(3y+1)^2-3y+1 = (x+3y+1)^2-9y^2-9y = (x+3y+1)^2-(3y+3/2)^2+9/4$. La fonction f n'est donc ni majorée ni minorée. En posant $\mathrm{X} = x+3y+1$ et $\mathrm{Y} = 3y+3/2$, les lignes de niveaux s'écrivent $\mathrm{X}^2 - \mathrm{Y}^2 = \ell$, ce sont des hyperboles, elles ont pour asymptotes les droites d'équations $\mathrm{X}+\mathrm{Y} = 0$ et $\mathrm{X}-\mathrm{Y} = 0$.
  - $f(x,y) = x^2 - 2xy + 3y^2 - 4y = (x-y)^2 + 2y^2 - 4y = (x-y)^2 + 2(y-1)^2 - 2$. En posant $\mathrm{X} = x-y$ et $\mathrm{Y} = \sqrt{2}(y-1)$, on a $f(x,y) = \mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 - 2$. La fonction f possède donc un minimum égal à -2, atteint pour $y-1 = 0$ et $x-y = 0$, c'est-à-dire en $(1,1)$. Ses lignes de niveau sont des ellipses de centre $(1,1)$.
  - $f(x,y) = x^2+y^2-2xy+x = (x-(y-1/2))^2-(y-1/2)^2+y^2 = (x-y+1/2)^2+y-1/4$. En posant $\mathrm{Y} = 1/4-y$ et $\mathrm{X} = x-y+1/2$ on a $f(x,y) = \mathrm{X}^2 - \mathrm{Y}$. Ses lignes de niveaux sont des paraboles.

4.3 Décomposition en éléments simples

- Une fraction rationnelle $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}$, où les racines α_k, d'ordre m_k de Q ne sont pas racines de P et où P est de degré strictement inférieur à Q, admet une décomposition unique de la forme :

$$\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}} = \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{m_k}\frac{a_{k,i}}{(\mathrm{X}-\alpha_k)^i}\right)$$

- Si α est une racine d'ordre n de Q, on peut écrire $\mathrm{P}/\mathrm{Q} = \frac{\mathrm{P}}{(\mathrm{X}-\alpha)^n \mathrm{Q}_n}$ et le coefficient de $\frac{1}{(\mathrm{X}-\alpha)^n}$ est $a_n = \frac{\mathrm{P}(\alpha)}{\mathrm{Q}_n(\alpha)}$.
- Les limites en l'infini permettent d'établir des relations entre certains coefficients.
- Une évaluation de la fraction rationnelle en une valeur simple, par exemple en 0 permet d'obtenir une relation simple sur tous les coefficients de la décomposition.
- Par exemple : $\frac{3\mathrm{X}^2}{(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}+2)^2} = \frac{a}{\mathrm{X}-1} + \frac{b}{\mathrm{X}+2} + \frac{c}{(\mathrm{X}+2)^2}$. En calculant la valeur en 1 de $\frac{3\mathrm{X}^2}{(\mathrm{X}+2)^2}$ on trouve $a = 1/3$, en calculant la valeur en -2 de $\frac{3\mathrm{X}^2}{\mathrm{X}-1}$ on trouve $c = -4$. En multipliant la fraction par X l'expression a une limite en $+\infty$ égale à 3 donc $a+b = 3$, finalement $\frac{3\mathrm{X}^2}{(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}+2)^2} = \frac{1/3}{\mathrm{X}-1} + \frac{8/3}{\mathrm{X}+2} - \frac{4}{(\mathrm{X}+2)^2}$.
  On aurait pu trouver b en cherchant la valeur en 0 de la fraction : $0 = -a + b/2 + c/4$ donc $b = 2a - c/2$.
- Dans le cas de racines complexes conjuguées au lieu d'écrire $\frac{a}{\mathrm{X}-\alpha} + \frac{\overline{a}}{\mathrm{X}-\overline{\alpha}}$ (car si la fraction est réelle les coefficients sont conjugués) on réunit ces deux termes en un terme $\frac{a\mathrm{X}+b}{\mathrm{X}^2+\beta\mathrm{X}+\gamma}$.
- Par exemple : $\frac{3}{x^3+1} = \frac{1}{x+1} + \frac{\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi/3}}{x-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}} + \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}}{x-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}} = \frac{1}{x+1} + \frac{2-x}{x^2-x+1}$.
- L'identification par passage au même dénominateur est une méthode suffisante et ultime pour déterminer l'ensemble des coefficients. Calculatoire on l'évitera autant que possible grâce aux méthodes précédentes.

▶▶ **Exercice 82** Décomposer en éléments simples :

a. $\frac{3x^2}{(x-1)(x+2)^2}$ b. $\frac{3}{x^3+1}$ c. $\frac{10x^2+12x+20}{x^3-8}$

▶▶ **Exercice 83** Décomposer en éléments simples :

a. $\frac{6}{(x^2+2x-15)}$ b. $\frac{16x-12}{x^3+x^2-6x}$ c. $\frac{6x^2-27x+22}{(x-3)^2(x+2)}$ d. $\frac{(x^2+5x-4)}{(x^3+2x^2+x+2)}$ e. $\frac{2x^2-11x-42}{(x+3)^2(x^2+x+3)}$

4.4 Sommes et produits simples

Soit I un ensemble fini et $(x_1, x_2, \ldots, x_n)_{i\in \mathrm{I}}$ une famille de nombres complexes indexés sur I.

- La somme et le produit des x_i se notent :

$$\sum_{i\in\mathrm{I}} x_i \qquad \text{et} \qquad \prod_{i\in\mathrm{I}} x_i$$

- Par convention, si I est vide, la somme vaut 0 et le produit vaut 1.
- Si I est la réunion de deux ensembles disjoints $\mathrm{I} = \mathrm{J} \cup \mathrm{K}$, alors :

$$\sum_{i\in\mathrm{I}} x_i = \sum_{i\in\mathrm{J}} x_i + \sum_{i\in\mathrm{K}} x_i \qquad \text{et} \qquad \prod_{i\in\mathrm{I}} x_i = \left(\prod_{i\in\mathrm{J}} x_i\right)\left(\prod_{i\in\mathrm{K}} x_i\right)$$

- Si $\mathrm{I} = \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1,\ n\} = [\![0\,;n]\!]$, alors on peut écrire :

$$\sum_{i\in\mathrm{I}} x_i = x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1} + x_n = \sum_{i=0}^{n} x_i = \sum_{\ell=0}^{n} x_\ell = \sum_{0\leqslant i\leqslant n} x_i = \sum_{i=1}^{n+1} x_{i-1} = \sum_{i=0}^{n} x_{n-i}$$

- Si on connait une famille de nombres complexes $(y_0,\ y_1, \ldots,\ y_{n+1})$ telle que pour tout $i \in [\![0\,;n]\!]$, on ait $x_i = y_i - y_{i+1}$, alors :

$$\text{(Somme téléscopique)} \quad \sum_{i=0}^{n} x_i = \sum_{i=0}^{n} (y_i - y_{i+1}) = y_0 - y_{n+1}$$

▶▶ **Exercice 84** Calculer les sommes suivantes :

1. $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)}$ et $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}$
2. $\mathrm{S}_p = \sum\limits_{k=1}^{n} k^p$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \{1,2,3\}$ (dans chaque cas, chercher un polynôme P_p de degré $p+1$ tel que $\mathrm{P}_p(x+1) - \mathrm{P}_p(x) = x^p$).

- Si on connait une famille de nombres complexes non nuls $(y_0,\ y_1, \ldots,\ y_{n+1})$ telle que pour tout $i \in [\![0\,;n]\!]$, on ait $x_i = \dfrac{y_i}{y_{i+1}}$, alors :

$$\text{(Produit téléscopique)} \qquad \prod_{i=0}^{n} x_i = \prod_{i=0}^{n} \frac{y_i}{y_{i+1}} = \frac{y_0}{y_{n+1}}$$

▶▶ **Exercice 85** Calculer $\prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \dfrac{1}{k}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\prod\limits_{k=1}^{n} \cos \dfrac{a}{2^k}$ pour $a \in]0, \pi[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

▶▶ **Exercice 86** (Transformation d'Abel)

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres complexes. On définit deux suites $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $\mathrm{A}_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ et $b_n = \mathrm{B}_{n+1} - \mathrm{B}_n$.

1. Démontrer que $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k \mathrm{B}_k = \mathrm{A}_n\mathrm{B}_n - \sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathrm{A}_k b_k$.
2. En déduire la valeur de $\sum\limits_{k=0}^{n} 2^k k$.

- Sommes classiques, pour $n \in \mathbb{N}^*$, a, x et y complexes, avec $a \neq 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \qquad \sum_{k=0}^{n-1} a^k = \frac{a^n - 1}{a-1}$$

$$x^n - y^n = (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k}y^k$$

$$x^n + y^n = (x+y)\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^{n-1-k}y^k$$

(si n impair uniquement)

$$\sum_{k=n_0}^{n} 1 = n - n_0 + 1 \qquad \frac{1}{1-a} = 1 + a + \cdots + a^{n-1} + \frac{a^n}{1-a}$$

$$\frac{1}{1+a} = 1 - a + \cdots + (-a)^{n-1} + \frac{(-a)^n}{1+a}$$

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique, $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} u_k = (n - n_0 + 1)\frac{u_0 + u_n}{2}$
- Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q \neq 1$, $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} v_k = v_{n_0}\frac{1 - q^{n-n_0+1}}{1-q}$

▶▶ **Exercice 87** Calculer pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{C}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos kx \quad \text{et} \quad \mathrm{S}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin kx$$

▶▶ **Exercice 88** Calculer $\displaystyle\sum_{z\in\mathbb{U}_n} |z-1|$

4.5 Sommes doubles

Soit Ω une partie finie de $\mathbb{N}^2$ et $(x_{i,j})_{(i,\,j)\in\Omega}$ une famille de nombres complexes indexés sur Ω.

- La somme et le produit des $x_{i,j}$ se notent :

$$\sum_{(i,j)\in\Omega} x_{i,j} \quad \text{et} \quad \prod_{(i,j)\in\Omega} x_{i,j}$$

- Les règles pour les ensembles disjoints ou vides sont celles des sommes et produits simples.
- Si $\Omega = \mathrm{I} \times \mathrm{J}$ avec $\mathrm{I} = [\![0\,;n]\!]$ et $\mathrm{J} = [\![0\,;p]\!]$ alors :

$$\sum_{(i,j)\in\Omega} x_{i,j} = \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{p} x_{i,j}\right) = \sum_{j=0}^{p}\left(\sum_{i=0}^{n} x_{i,j}\right) = \sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ 0\leqslant j\leqslant p}} x_{i,j}$$

- Si $x_{i,j} = \lambda_i\mu_j y_{i,j}$ on peut regrouper :

$$\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ 0\leqslant j\leqslant p}} x_{i,j} = \sum_{i=0}^{n}\left(\lambda_i\sum_{j=0}^{p}\mu_j y_{i,j}\right) = \sum_{j=0}^{p}\left(\mu_j\sum_{i=0}^{n}\lambda_i y_{i,j}\right)$$

- En particulier si $x_{i,j} = \lambda_i\mu_j$ on obtient : $\displaystyle\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ 0\leqslant j\leqslant p}} x_{i,j} = \left(\sum_{i=0}^{n}\lambda_i\right)\left(\sum_{j=0}^{p}\mu_j\right)$
- Si $\Omega = \left\{(i,j)\in\mathbb{N}^2 | 0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n\right\}$, (domaine triangulaire), alors :

$$\sum_{(i,j)\in\Omega} x_{i,j} = \sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} x_{i,j} = \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} x_{i,j}\right) = \sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{j} x_{i,j}\right)$$

- Produits de sommes classiques :

$$\sum_{i=0}^{n} x_i \sum_{j=0}^{p} y_j = \sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n \\ 0\leqslant j\leqslant p}} x_i y_j \qquad \left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)^2 = \sum_{i=0}^{n} x_i^2 + 2\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j$$

$$\left|\sum_{i=0}^{n} x_i\right|^2 = \sum_{i=0}^{n} |x_i|^2 + 2\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n} \mathrm{Re}\,(x_i\overline{x_j})$$

▶▶ **Exercice 89** Calculer les sommes suivantes :

a. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} 1$ b. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} j$ c. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} j$

▶▶ **Exercice 90** Calculer les sommes suivantes :

a. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij$ b. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} ij$ c. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \min(i,j)$

▶▶ **Exercice 91**

1. Calculer $\mathrm{S}_2(n) = \sum\limits_{i=1}^{n}\left(\sum\limits_{j=i}^{n}\frac{i}{j}\right)$ et $\mathrm{S}_3(n) = \sum\limits_{i=1}^{n}\left(\sum\limits_{j=i}^{n}\left(\sum\limits_{k=j}^{n}\frac{i}{jk}\right)\right)$
2. Pour tous $n,\, k\in\mathbb{N}^*$ établir $\displaystyle\sum_{1\leqslant i_1\leqslant i_2\leqslant\cdots\leqslant i_k\leqslant n}\frac{i_1}{i_2 i_3\cdots i_k} = \frac{n(n+2^k-1)}{2^k}$

4.6 Coefficients binomiaux

- Soit $n\in\mathbb{N}$. On appelle factorielle de $n\in\mathbb{N}$ le produit $n! = \prod\limits_{k=1}^{n} k$.
- On a en particulier $0! = 1! = 1$ et $(n+1)! = (n+1)n!$ et, si $k\in[\![\,0\,;n-1\,]\!]$:

$$n\times(n-1)\times\cdots\times(n-k) = \frac{n!}{(n-k-1)!}$$

- Soit p un entier. On appelle **coefficient binomial** $\dbinom{n}{p}$ (se lit « p parmi n ») le nombre entier nul si $p<0$ ou $p>n$, sinon égal à :

$$\underbrace{\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}}_{\text{Formule de Pascal}} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{n-p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1} = \frac{n}{n-p}\binom{n-1}{p}$$

- En particulier : $\dbinom{n}{0} = 1$, $\dbinom{n}{1} = n$, $\dbinom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$, $\dbinom{n}{n-1} = n$, $\dbinom{n}{n} = 1$.
- **Binôme de Newton.** Pour tous nombres complexes $x, y\in\mathbb{C}$ et tout entier $n\in\mathbb{N}$:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$$

▶▶ **Exercice 92** 1. Soient m, k deux entiers naturels. Établir : $\binom{m+k}{m} = \binom{m+k+1}{m+1} - \binom{m+k}{m+1}$.

2. En déduire, pour tous $m, n\in\mathbb{N}^*$, la valeur de $\mathrm{S} = \sum\limits_{k=0}^{n}\binom{m+k}{m}$ et $\mathrm{P} = \sum\limits_{k=0}^{n}\left(\prod_{p=1}^{m}(k+p)\right)$.

▶▶ **Exercice 93**

1. Calculer $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n}$.

2. Montrer que $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\ldots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\ldots$ et trouver la valeur commune des deux sommes.
3. Montrer que $\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\ldots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}$ (utiliser le polynôme $(1+x)^{2n}$).
4. a) Soit $\mathrm{I}_n=\int_0^1(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x$. Trouver une relation de récurrence liant I_n et I_{n+1} et en déduire I_n en fonction de n (faire une intégration par parties dans $\mathrm{I}_n-\mathrm{I}_{n+1}$).
   b) Démontrer l'identité valable pour $n\geqslant 1$: $1-\frac{\binom{n}{1}}{3}+\frac{\binom{n}{2}}{5}+\ldots+(-1)^n\frac{\binom{n}{n}}{2n+1}=\frac{2.4.....(2n)}{1.3...(2n+1)}$.

▶▶ **Exercice 94** Montrer que pour tout $z\in\mathbb{C}$, $\sum\limits_{\omega\in\mathbb{U}_n}(z+\omega)^n=n(z^n+1)$.

▶▶ **Exercice 95** Soit $n\in\mathbb{N}$, calculer les quantités

$$\mathrm{B}_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}\qquad \mathrm{F}_n=\sum_{k=0}^{n}k(k!)\qquad \mathrm{S}_n=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}2^{2i-j}\qquad \mathrm{U}_n=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}|i-j|$$

4.7 Petits systèmes linéaires

- On appelle système linéaire (S) de n équations à p inconnues un système d'équations de la forme

$$(\mathrm{S})\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & + & \ldots & + & a_{1p}\,x_p & = & b_1 & (\mathrm{L}_1)\\ a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & + & \ldots & + & a_{2p}\,x_p & = & b_2 & (\mathrm{L}_2)\\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & (\mathrm{L}_i)\\ a_{n1}\,x_1 & + & a_{n2}\,x_2 & + & \ldots & + & a_{np}\,x_p & = & b_n & (\mathrm{L}_n)\end{array}\right.$$

  où les a_{ij} sont des réels appelés **coefficients** du système et les réels $(b_i)_{i=1,\ldots,n}$ constituent le **second membre** du système. Les $x_1,\ldots,x_p$ sont les p inconnues du système. Chaque équation est repérée par un nom : L_i pour i-ème ligne.
- Une **solution** du système dans $\mathbb{K}$, est une p-liste $(x_1,\,x_2,\ldots,\,x_p)$ réels pour laquelle toutes les équations sont vérifiées. Résoudre le système c'est en déterminer l'ensemble des solutions.
- Si $p=2$, le système est équivalent à l'intersection de n droites dans le plan. Si $p=3$, le système est équivalent à l'intersection de n plans dans l'espace.
- Si $p=n=2$, deux droites ont un unique point d'intersection si et seulement si elles ne sont pas parallèles, c'est à dire si les vecteurs de coordonnées (a_{11},a_{12}) et (a_{21},a_{22}) ne sont pas colinéaires. Cette condition s'écrit aussi :

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0\qquad \text{(Déterminant du système)}$$

  C'est alors un **système de Cramer** et sa solution (x_1,x_2) est donnée par :

$$x_1=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}b_1 & a_{12}\\ b_2 & a_{22}\end{vmatrix}\qquad\text{et}\qquad x_2=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}a_{11} & b_1\\ a_{21} & b_2\end{vmatrix}\qquad\text{(Formules de Cramer)}$$

  Si les droites sont parallèles le système possédera aucune ou une droite solution.

▶▶ **Exercice 96** Résoudre $\left\{\begin{array}{rcl} x+my & = & -3\\ mx+4y & = & 6\end{array}\right.$ Interprétation géométrique ?

- Un système est dit **triangulaire** lorsqu'il est de la forme :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n=b_1\\ & & + & a_{22}x_2 & + \ldots & + & a_{2n}x_n=b_2\\ & & & & \ddots & & \vdots\ =\\ & & & & & & a_{nn}x_n=b_n\end{array}\right.\qquad \text{(les } (a_{i,j}) \text{ peuvent être nuls.)}$$

Lorsque le système est triangulaire, on peut facilement le résoudre, pas à pas en commençant par les dernières inconnues.

- **Algorithme du pivot de Gauss.** L'idée générale pour résoudre un système est de combiner les lignes afin d'éliminer progressivement des coefficients et se ramener à un système triangulaire, facile à résoudre. En effet, effectuer les **opérations élémentaires** suivantes sur un système conduit toujours à un système équivalent (qui possède le même ensemble de solutions) :

  1. $L_i \leftrightarrow L_j$: échanger les lignes i et j.
  2. $L_i \leftarrow aL_i$ où $a \in \mathbb{R}^*$: multiplier la ligne i par a.
  3. $L_i \leftarrow L_i + bL_j$ où $i \neq j$, $b \in \mathbb{R}$: ajouter b fois la ligne j à la ligne a.

- **Algorithme du pivot de Gauss** :

  1. On forme un tableau à n lignes et $p+1$ colonnes, avec les coefficients du système sur les p première colonnes et le second membre sur la dernière colonne.
  2. On choisit un coefficient de la première colonne a_{i1} non nul, appelé le **pivot**. Si on n'en trouve pas, on passe à l'étape suivante, sinon on échange la ligne 1 et la ligne i et on indique $L_i \leftrightarrow L_1$. On effectue les opérations $L_k \leftarrow a_{11}L_k - a_{k1}L_1$ pour tout $k > 1$ dans ce nouveau tableau et on indique les opérations effectuées.
  3. On reproduit l'étape précédente pour la colonne suivante en choisissant le pivot sur une ligne qui n'en contient pas encore.
  4. On conclut en fonction de la situation :

     a) si tous les coefficients d'une ligne sont nuls (on parle alors d'équation en surnombre ou **équation non principale**), sauf son second membre : le système n'a pas de solution.

     b) Sinon, toutes les inconnues dans les colonnes sans pivot sont des **inconnues secondaires**, elles sont alors reportées au second membre, où elles jouent le rôle de paramètres arbitraires. A paramètres fixés, on a un système de Cramer que l'on résout en remontant les équations principales.

►► **Exercice 97** Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$\begin{cases} x+y+2z &= 3 \\ x+2y+z &= 1 \\ 2x+y+z &= 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2z &= 1 \\ -y+z &= 2 \\ x-2y &= 1 \end{cases}$$

►► **Exercice 98** Résoudre les deux systèmes suivants. Qu'en pensez-vous ?

$$\begin{cases} x+5y+9z &= 180 \\ 9x+10y+5z &= 40 \\ 10x+9y+z &= -50 \end{cases} \qquad \begin{cases} 10x+9y+z &= -50 \\ 9x+10y+5z &= 41 \\ x+5y+9z &= 180 \end{cases}$$

►► **Exercice 99** Résoudre dans $\mathbb{R}^3$: $\begin{cases} (1-m)x+2y-z=0 \\ -2x-(3+m)y+3z=0 \\ x+y-(2+m)z=0 \end{cases}$.

►► **Exercice 100** Discuter, suivant la valeur du paramètre $m \in \mathbb{C}$, le nombre de solutions dans $\mathbb{C}^3$ du système :

$$\begin{cases} x-my+m^2z &= m \\ mx-m^2y+mz &= 1 \\ mx+y-m^3z &= -1 \end{cases}$$