Cours de Mathématiques

SUP 1 - 1ère partie

V. Lambert

6 août 2024

Merci à tous les élèves des Lazaristes pour leurs remarques et corrections.

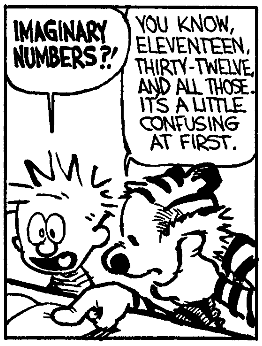
Table des matières

Chapitre 1

Nombres complexes

« La voie la plus courte et la meilleure entre deux vérités du domaine réel passe souvent par le domaine imaginaire. »

— Jacques Hadamard (1865–1963)



1.1 Le corps des nombres complexes

1.1.1 Définition, conjugaison, module

Le carré de tout nombre réel étant positif, l'équation

$$x^2 = -1$$

n'admet aucune solution réelle. Nous admettrons qu'il existe un ensemble de nombres A ayant les propriétés suivantes.

— $\mathbb{R} \subset A$.

— On peut additionner, soustraire et multiplier les éléments de A en utilisant les règles usuelles de l'algèbre.
— L'équation $z^2 = -1$ admet au moins une solution sur A.

On note i une solution de cette équation.

Définition 1.1.1

On appelle corps des nombres complexes l'ensemble des nombres $x + \mathrm{i}y$ où x et y sont réels.

Remarque

⇨ $\mathbb{C}$ est stable par les opérations d'addition, de soustraction et de multiplication.

Définition 1.1.2

Pour tout nombre complexe z, il existe un unique couple de réels (x, y) tel que $z = x + \mathrm{i}y$. Les réels x et y sont respectivement appelés *partie réelle* et *partie imaginaire* de z. On note

$$\mathrm{Re}(z) := x \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(z) := y.$$

Vocabulaire

⇨ On appelle *forme cartésienne* de $z \in \mathbb{C}$, toute écriture de la forme $z = x + \mathrm{i}y$ où $x, y \in \mathbb{R}$. La proposition précédente affirme que quel que soit $z \in \mathbb{C}$, cette écriture existe et est unique.

⇨ Un nombre complexe est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle. On dit qu'un nombre complexe est *imaginaire pur* lorsque sa partie réelle est nulle. L'ensemble des nombres imaginaires purs est donc

$$\mathrm{i}\mathbb{R} := \{\mathrm{i}y : y \in \mathbb{R}\}.$$

⇨ Soit $\mathcal{R} = (O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ un repère orthonormé direct du plan. À tout nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$, on associe le point M dont les coordonnées dans le repère $\mathcal{R}$ sont (x, y). On a donc

$$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{e_1} + y\,\vec{e_2}$$

et on dit que M a pour affixe z. Pout tout point M du plan, il existe un unique $z \in \mathbb{C}$ tel que M a pour affixe z ; on dit alors que z est *l'affixe* du point M. On a ainsi identifié $\mathbb{C}$ avec l'ensemble des points du plan.

Remarques

⇨ Si $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$ sont tels que

$$x_1 + \mathrm{i}y_1 = x_2 + \mathrm{i}y_2,$$

alors $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$. On dit souvent qu'on procède par *identification*, mais cette terminologie est abusive. On utilise en fait la proposition précédente et on dira plutôt "par unicité de l'écriture algébrique".

⇨ **ATTENTION :** de même qu'on ne peut pas écrire d'inégalités entre les points du plan, les inégalités entre nombres complexes n'ont aucun sens.

Proposition 1.1.1

Un nombre complexe est nul si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire le sont.

Proposition 1.1.2

Soit z et z' deux nombres complexes, λ et μ deux réels. Alors
— $\mathrm{Re}(\lambda z + \mu z') = \lambda\,\mathrm{Re}(z) + \mu\,\mathrm{Re}(z')$,
— $\mathrm{Im}(\lambda z + \mu z') = \lambda\,\mathrm{Im}(z) + \mu\,\mathrm{Im}(z')$.

Remarque

⇨ Attention, l'identité $\mathrm{Re}(zz') = \mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Re}(z')$ est fausse. Par exemple $\mathrm{Re}(\mathrm{i} \cdot \mathrm{i}) = -1$ et $\mathrm{Re}(\mathrm{i})\,\mathrm{Re}(\mathrm{i}) = 0$.

Définition 1.1.3

Soit z un nombre complexe. On appelle *conjugué* de z et on note $\overline{z}$ le nombre complexe

$$\overline{z} := x - \mathrm{i}y$$

où x et y sont respectivement la partie réelle et imaginaire de z.

Remarque

➯ Si M est le point d'affixe $z \in \mathbb{C}$, le point M' d'affixe $\overline{z}$ est le symétrique de M par rapport à l'axe (Ox).

Proposition 1.1.3

Soit $z, z' \in \mathbb{C}$. Alors
$$\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z}', \quad \overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z}', \quad \text{et} \quad \overline{\overline{z}} = z.$$

Définition 1.1.4

Soit z un nombre complexe. On appelle *module* de z et on note $|z|$ le nombre réel positif
$$|z| \coloneqq \sqrt{x^2 + y^2}$$
où x et y sont respectivement la partie réelle et imaginaire de z.

Remarques

➯ Si $z \in \mathbb{R}$, le module de z est sa valeur absolue.

➯ Si M est le point d'affixe z, le module de z est la distance OM. Si A et B sont deux points d'affixes respectives a et b, alors $AB = |b - a|$.

➯ Si $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$
- $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| = r\}$ est le *cercle* de centre a et de rayon r.
- $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leqslant r\}$ est le *disque fermé* de centre a et de rayon r.
- $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\}$ est le *disque ouvert* de centre a et de rayon r.

Définition 1.1.5

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Remarque

➯ L'identification entre $\mathbb{C}$ et le plan complexe nous amène à identifier $\mathbb{U}$ avec le cercle de centre O et de rayon 1, appelé *cercle trigonométrique*.

Proposition 1.1.4

Soit z un nombre complexe. Alors
$$|z|^2 = z\overline{z}.$$
De plus, $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$.

Remarques

➯ Afin d'exploiter cette identité, on cherchera souvent à travailler avec le carré des modules.

➯ Si $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $a \in \mathbb{C}$ et de rayon $r > 0$, alors
$$\begin{aligned}
\forall z \in \mathbb{C}, \quad z \in \mathcal{C} &\iff |z - a| = r \\
&\iff |z - a|^2 = r^2 \\
&\iff (z - a)\overline{(z - a)} = r^2 \\
&\iff z\overline{z} - \overline{a}z - a\overline{z} + \left(a\overline{a} - r^2\right) = 0.
\end{aligned}$$

Réciproquement, si $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{R}$, l'ensemble d'équation $z\overline{z} - \overline{a}z - a\overline{z} + b = 0$ est soit un cercle de centre a, soit réduit au point a, soit l'ensemble vide.

Proposition 1.1.5

Soit $z, z' \in \mathbb{C}$. Alors
$$|zz'| = |z|\,|z'| \quad \text{et} \quad |\overline{z}| = |z|\,.$$

Proposition 1.1.6

Si z et z' sont deux nombres complexes tels que $zz' = 0$, alors $z = 0$ ou $z' = 0$. On dit que $\mathbb{C}$ est *intègre*.

Proposition 1.1.7

Soit z un nombre complexe non nul. Alors il existe un unique nombre complexe z' tel que $zz' = 1$. On note ce nombre z^{-1} ou $1/z$. De plus
$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Remarque

⇨ Si $z \in \mathbb{U}$, alors $1/z = \overline{z}$. Pour inverser un nombre complexe de module 1, il suffit donc de le conjuguer.

Exercice 1

⇨ Calculer l'inverse de $1 + \mathrm{i}$.

Proposition 1.1.8

Soit z un nombre complexe non nul. Alors
$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}} \quad \text{et} \quad \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}.$$

Exercice 2

⇨ Soit $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $|a| < 1$ et $|b| < 1$. Montrer que
$$\left|\frac{a - b}{1 - \overline{a}b}\right| < 1.$$

Proposition 1.1.9

Soit z un nombre complexe. Alors
$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2\mathrm{i}}.$$
En particulier
- z est réel si et seulement si $\overline{z} = z$.
- z est imaginaire pur si et seulement si $\overline{z} = -z$.

Remarque

⇨ En pratique, pour montrer qu'un nombre complexe est réel, une bonne méthode est de montrer qu'il est égal à son conjugué. La méthode consistant à montrer que sa partie imaginaire est nulle est à proscrire.

Exercices 3

⇨ Soit a et b deux nombres complexes de module 1 tels que $ab \neq -1$. Montrer que
$$\frac{a + b}{1 + ab}$$
est un nombre réel.

⇨ Donner une condition nécessaire et suffisante sur $z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}\}$ pour que
$$\frac{z + 2}{1 + \mathrm{i}z}$$
soit réel.

1.1.2 Inégalité triangulaire

Proposition 1.1.10

Soit $a \in \mathbb{C}$. Alors
$$\mathrm{Re}(a) \leqslant |\mathrm{Re}(a)| \leqslant |a| \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(a) \leqslant |\mathrm{Im}(a)| \leqslant |a|.$$
De plus, $\mathrm{Re}(a) = |a|$ si et seulement si a est réel positif.

Proposition 1.1.11: Inégalité triangulaire

Soit a et b deux nombres complexes. Alors

$$|a+b| \leqslant |a| + |b| .$$

De plus, l'égalité a lieu si et seulement si a et b sont positivement liés, c'est-à-dire lorsque $a = 0$ ou lorsqu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $b = \lambda a$.

Remarque

⇨ Si (ABC) est un triangle, alors $AC \leqslant AB + BC$. En effet, si on note a, b, c les affixes respectives de A, B, C

$$AC = |c-a| = |c-b+b-a| \leqslant |c-b| + |b-a| = BC + AB.$$

Cette inégalité explique le nom d'inégalité triangulaire donné à la proposition précédente.

Proposition 1.1.12: Inégalité triangulaire bis

Soit a et b deux nombres complexes. Alors

$$||a| - |b|| \leqslant |a+b| \leqslant |a| + |b| .$$

Remarque

⇨ La première inégalité est appelée inégalité triangulaire bis. Elle a plusieurs variantes :
- Si on remplace b par $-b$, on obtient l'inégalité

$$||a| - |b|| \leqslant |a-b|$$

qui affirme que deux nombres complexes proches ont des modules proches.
- En remarquant que si x est réel, $|x| \geqslant x$, on obtient

$$|a+b| \geqslant |a| - |b| .$$

Cette inégalité affirme que si b a un module petit par rapport à celui de a, alors $a+b$ est éloigné de 0.

Exercices 4

⇨ Soit a et b deux nombres complexes distincts. On pose $\delta := |a-b|$. Montrer que les disques ouverts de centre a et b et de rayon $\delta/2$ sont disjoints.

⇨ Que peut-on dire de $|z|$ si $|1-z| \leqslant 1/4$? Faire un dessin puis une preuve.

Proposition 1.1.13

Soit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. Alors

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k| .$$

1.1.3 Puissances entières, binôme de Newton

Définition 1.1.6

Soit $a \in \mathbb{C}$. On définit a^n pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ en posant
- $a^0 := 1$,
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a^{n+1} := a^n a$.

Remarque

⇨ En particulier $0^0 = 1$.

Proposition 1.1.14

Soit a, b deux nombres complexes, n et m deux entiers naturels. Alors

$$(ab)^n = a^n b^n, \quad a^{n+m} = a^n a^m \quad \text{et} \quad (a^n)^m = a^{nm}.$$

Proposition 1.1.15

Soit $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors
$$\overline{a^n} = \overline{a}^n \quad \text{et} \quad |a^n| = |a|^n .$$

Exercice 5

⇨ Montrer que si $P := a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$ est un polynôme à coefficients réels, l'ensemble de ses racines est stable par conjugaison.

Définition 1.1.7

Soit a un nombre complexe non nul. On étend la définition de a^n à $n \in \mathbb{Z}$ en posant
$$a^n := \frac{1}{a^{-n}}$$
lorsque $n < 0$.

Proposition 1.1.16

Soit a, b deux nombres complexes non nuls, n et m deux entiers relatifs. Alors
$$(ab)^n = a^n b^n, \quad a^{n+m} = a^n a^m \quad \text{et} \quad (a^n)^m = a^{nm}.$$

Proposition 1.1.17

Soit a un nombre complexe non nul et $n \in \mathbb{Z}$. Alors
$$\overline{a^n} = \overline{a}^n \quad \text{et} \quad |a^n| = |a|^n .$$

Définition 1.1.8

Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. Alors il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que
$$a = qb + r \quad \text{et} \quad 0 \leqslant r < b.$$
q est appelé *quotient* de la division euclidienne de a par b, r son *reste*.

Exercice 6

⇨ On pose $j = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$. Calculer j^3 puis en déduire j^{2024}.

Définition 1.1.9

Pour tout entier naturel n, on définit la *factorielle* de n que l'on note $n!$ par
- $0! := 1$,
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)! := (n+1)\, n!$.

Remarque

⇨ Si $n \in \mathbb{N}^*$
$$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1.$$

Définition 1.1.10

Pour tout couple (k, n) d'entiers naturels, on définit $\binom{n}{k}$ que l'on prononce « k parmi n », comme étant le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments.

Remarques

⇨ Si $k > n$, alors $\binom{n}{k} = 0$.

⇨ Si $n \in \mathbb{N}$, alors
$$\binom{n}{0} = 1 \quad \text{et} \quad \binom{n}{n} = 1.$$

Proposition 1.1.18

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$. Alors
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Proposition 1.1.19: Relation de Pascal

Soit k et n deux entiers naturels. Alors
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Remarque

⇨ Cette formule est appelée relation de Pascal. Elle permet de calculer efficacement les $\binom{n}{k}$ en construisant le triangle de Pascal. Dans ce tableau contenant les $\binom{n}{k}$, où n désigne la ligne et k désigne la colonne, on commence par placer une colonne de 1 indiquant le fait que $\binom{n}{0} = 1$, puis une diagonale de 1 indiquant le fait que $\binom{n}{n} = 1$. Les coefficients au-dessus de la diagonale sont nuls et ne sont généralement pas représentés. Ceux en dessous de la diagonale sont complétés, ligne après ligne en utilisant la relation de Pascal qui affirme que chaque coefficient est la somme du coefficient se situant au-dessus de lui et de celui au-dessus à gauche.

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

Ce triangle permet par exemple de lire sur la dernière ligne que $\binom{5}{1} = 5$ et $\binom{5}{2} = 10$.

Proposition 1.1.20

Soit n un entier naturel et $k \in [\![0, n]\!]$. Alors
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Remarques

⇨ On peut simplifier l'écriture de $\binom{n}{k}$ en
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{\overbrace{n\,(n-1)\cdots(n-(k-1))}^{k \text{ termes}}}{k!}.$$

En particulier
$$\binom{n}{1} = n \quad \text{et} \quad \binom{n}{2} = \frac{n\,(n-1)}{2}.$$

⇨ Si $k, n \in \mathbb{N}^*$, on a la formule dite « du capitaine »
$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \cdot \binom{n-1}{k-1}.$$

Exercice 7

⇨ Soit $k, n \in \mathbb{N}$. Montrer que
$$\binom{n}{k} \leqslant \frac{n^k}{k!}.$$

Proposition 1.1.21: Binôme de Newton

Soit a et b deux nombres complexes et n un entier naturel. Alors

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Proposition 1.1.22

Soit a et b deux nombres complexes. Alors

— $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

— Plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right) \\ &= (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k\right). \end{aligned}$$

Proposition 1.1.23

Soit a un nombre complexe et n un entier naturel. Alors

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \begin{cases} \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a} & \text{si } a \neq 1 \\ n+1 & \text{si } a = 1. \end{cases}$$

1.2 Forme trigonométrique

1.2.1 Exponentielle $\mathrm{i}\theta$

Définition 1.2.1

Pour tout réel θ, on définit l'exponentielle de $\mathrm{i}\theta$ par

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} := \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta.$$

Proposition 1.2.1

Soit θ_1 et θ_2 deux réels. Alors

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}0} = 1 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}.$$

Proposition 1.2.2

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors :

- $\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$.
- $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \neq 0$ et $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n$ **(Formule de Moivre)**.

Remarque

⇨ La formule de Moivre se réécrit, pour $n \in \mathbb{Z}$ et pour $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta) = (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n.$$

Proposition 1.2.3: Formule d'Euler

Soit θ un réel. Alors les formules d'Euler s'écrivent

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}.$$

Proposition 1.2.4

- Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors $e^{i\theta} = 1$ si et seulement si $\theta \equiv 0 \ [2\pi]$.
- Plus précisément, étant donnés θ_1 et $\theta_2 \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2}$ si et seulement si $\theta_1 \equiv \theta_2 \ [2\pi]$.

Exercice 8

⇨ Déterminer la partie réelle de

$$\frac{1}{1-\cos\theta - i\sin\theta}.$$

Proposition 1.2.5: Paramétrisation de $\mathbb{U}$ par « l'exponentielle $i\theta$ »

L'application qui à θ associe $e^{i\theta}$ est une surjection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U}$. Autrement dit :

- Si $\theta \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta} \in \mathbb{U}$.
- Pour tout $u \in \mathbb{U}$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $u = e^{i\theta}$.

1.2.2 Applications à la trigonométrie

Applications

⇨ *Factorisation par l'arc moitié*

Étant donné un réel θ

$$\begin{aligned} 1+e^{i\theta} &= e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}}\right) \\ &= 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}. \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} 1-e^{i\theta} &= e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}}-e^{i\frac{\theta}{2}}\right) \\ &= -2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}. \end{aligned}$$

Plus généralement, étant donnés $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$

$$e^{i\theta_1}+e^{i\theta_2} = e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\left(e^{i\frac{\theta_1-\theta_2}{2}}+e^{-i\frac{\theta_1-\theta_2}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}},$$

$$e^{i\theta_1}-e^{i\theta_2} = e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\left(e^{i\frac{\theta_1-\theta_2}{2}}-e^{-i\frac{\theta_1-\theta_2}{2}}\right) = 2i\sin\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}.$$

⇨ *Calcul de sommes trigonométriques*

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$C_n := \sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta) \quad \text{et} \quad S_n := \sum_{k=0}^{n}\sin(k\theta).$$

⇨ *Linéarisation de $\cos^n\theta\sin^m\theta$*

Étant donné deux entiers naturels n et m, on cherche à exprimer $\cos^n\theta\sin^m\theta$ comme combinaison linéaire des $\cos(k\theta)$ et $\sin(k\theta)$ pour $k \in \mathbb{N}$. Pour cela, on peut utiliser les formules d'Euler avant de développer l'expression par la formule du binôme de Newton et de regrouper les termes en utilisant à nouveau les formules d'Euler. Cette opération sera utile lors du calcul de primitives.

Exemple : Linéariser $\sin^6\theta$ et $\sin\theta\cos^4\theta$.

⇨ *Expression de $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ comme polynôme en $\cos\theta$ et $\sin\theta$*

Pour cette opération, une méthode consiste à utiliser la formule de Moivre avant de développer l'expression obtenue à l'aide du binôme de Newton.

Exemple : Exprimer $\cos(5\theta)$ comme un polynôme en $\cos\theta$.

Exercices 9

- ⇨ Exprimer $\tan(5\theta)$ en fonction de $\tan\theta$.
- ⇨ Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta).$$
- ⇨ Exprimer $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$ à l'aide de radicaux.

1.2.3 Forme trigonométrique

Définition 1.2.2

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On appelle *forme trigonométrique* de z toute écriture
$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$
où $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Remarque

- ⇨ Si $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ est une forme trigonométrique, alors $r = |z|$.

Définition 1.2.3

On appelle *argument* de $z \in \mathbb{C}^*$ tout réel θ tel que
$$z = |z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

Proposition 1.2.6

Tout nombre complexe non nul $z \in \mathbb{C}^*$ admet un argument. Si θ est un de ses arguments, l'ensemble de ses arguments est $\theta + 2\pi\mathbb{Z} := \{\theta + k2\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. On écrit
$$\arg(z) \equiv \theta \ \ [2\pi].$$

Remarques

- ⇨ En particulier, tout nombre complexe non nul admet une forme trigonométrique. En pratique, on force la factorisation de z par $|z|$ et on écrit le second terme sous la forme $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.
- ⇨ Soit $r_1, r_2 > 0$ et $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ tels que
$$r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1} = r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}.$$
Alors $r_1 = r_2$ et $\theta_1 \equiv \theta_2$ $[2\pi]$. Contrairement à la forme cartésienne, il n'y a pas unicité de la forme trigonométrique.
- ⇨ Si z est un nombre complexe non nul, il existe un unique $\theta \in\,]-\pi, \pi]$ tel que $\arg z \equiv \theta$ $[2\pi]$. On dit que θ est l'*argument principal* de z et on le note $\mathrm{Arg}(z)$.
- ⇨ Il existe deux moyens de représenter un même nombre complexe : la forme cartésienne et la forme trigonométrique. La première est particulièrement adaptée aux calculs de sommes, tandis que la seconde est particulièrement adaptée aux calculs de produits.
- ⇨ Étant donné un nombre complexe z, on appelle *forme trigonométrique généralisée* de z toute écriture du type $z = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où $\rho \in \mathbb{R}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Attention, même si $z \neq 0$, on n'a pas nécessairement $\arg z \equiv \theta \ \ [2\pi]$. En effet :
  - Si $\rho > 0$, alors $\rho = |z|$ et $\arg z \equiv \theta \ \ [2\pi]$.
  - Si $\rho < 0$, alors $\rho = -|z|$ et $\arg z \equiv \theta + \pi \ \ [2\pi]$.

  Lorsque l'énoncé demandera explicitement de mettre un nombre complexe sous forme trigonométrique, c'est bien sous la forme $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $r > 0$ qu'il faudra le mettre. Cependant, lorsqu'on demandera de mettre z sous forme trigonométrique pour conduire des calculs, une forme trigonométrique généralisée suffira le plus souvent.

Exercices 10

- ⇨ Quelle est la forme trigonométrique de $-2 - 2\sqrt{3}\mathrm{i}$? Celle de $1 + 2\mathrm{i}$?

⇨ Mettre sous forme trigonométrique
$$\left(\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1-\mathrm{i}}\right)^{20}.$$
⇨ Résoudre l'équation
$$z^2 = \overline{z}$$
en utilisant la forme cartésienne, puis la forme trigonométrique de z.

⇨ Résoudre l'équation $z^5 = 1/\overline{z}$.

Proposition 1.2.7

Soit $z, z' \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{Z}$. Alors
$$\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') \ \ [2\pi], \qquad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z') \ \ [2\pi],$$
$$\arg(z^n) \equiv n\arg(z) \ \ [2\pi], \qquad \arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z) \ [2\pi].$$

Remarque

⇨ En général, $\mathrm{Arg}(zz') \neq \mathrm{Arg}(z) + \mathrm{Arg}(z')$. Par exemple $\mathrm{Arg}((-1)(-1)) = 0$ et $\mathrm{Arg}(-1) + \mathrm{Arg}(-1) = 2\pi$.

1.2.4 Exponentielle complexe

Définition 1.2.4

Soit $z = x + \mathrm{i}y$ un nombre complexe où x et y sont respectivement la partie réelle et imaginaire de z. On appelle exponentielle de z et on note e^z le nombre complexe défini par
$$\mathrm{e}^z := \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y).$$

Proposition 1.2.8

Soit z et z' deux nombres complexes. Alors
$$\mathrm{e}^0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^z\mathrm{e}^{z'}.$$

Proposition 1.2.9

Soit z un nombre complexe, et $n \in \mathbb{Z}$. Alors e^z est non nul,
$$\frac{1}{\mathrm{e}^z} = \mathrm{e}^{-z} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{e}^{nz} = (\mathrm{e}^z)^n.$$

Proposition 1.2.10

Soit z un nombre complexe. Alors
$$\overline{\mathrm{e}^z} = \mathrm{e}^{\overline{z}} \qquad \text{et} \qquad |\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}.$$

Remarque

⇨ Si $z \in \mathbb{C}$, alors
$$|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)} \qquad \text{et} \qquad \arg(\mathrm{e}^z) \equiv \mathrm{Im}(z) \ [2\pi].$$

Proposition 1.2.11

- Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors $\mathrm{e}^z = 1$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $z = \mathrm{i}k2\pi$.
- Plus précisément, étant donnés z_1 et z_2 deux nombres complexes, $\mathrm{e}^{z_1} = \mathrm{e}^{z_2}$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $z_1 = z_2 + \mathrm{i}k2\pi$.

Proposition 1.2.12

L'exponentielle est une surjection de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^*$. Autrement dit :
— Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e^z \in \mathbb{C}^*$.
— Pour tout $z' \in \mathbb{C}^*$, il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $e^z = z'$.

Remarque

⇨ Si $z \in \mathbb{C}^*$, nous venons de voir qu'il existe $z' \in \mathbb{C}$ tel que $e^{z'} = z$. Cependant, z' n'est pas unique, ce qui nous empêche de définir le logarithme de z. Par contre, on peut montrer qu'il existe un unique $z' \in \mathbb{C}$ tel que $e^{z'} = z$ et $\operatorname{Im}(z') \in \,]-\pi, \pi]$. Ce nombre est appelé logarithme principal de z et noté $\operatorname{Ln}(z)$. De plus $\operatorname{Ln}(z) = \ln|z| + i\operatorname{Arg}(z)$. C'est le logarithme calculé par les logiciels de calcul formel ainsi que vos calculatrices. Malheureusement, l'identité $\operatorname{Ln}(zz') = \operatorname{Ln}(z) + \operatorname{Ln}(z')$ est fausse ; elle n'est vraie que modulo $i2\pi$. C'est pourquoi, nous n'emploierons jamais de logarithme avec les nombres complexes.

Exercice 11

⇨ Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation $e^z = \sqrt{3} + 3i$.

1.3 Racines d'un nombre complexe

1.3.1 L'équation du second degré

Définition 1.3.1

Soit a un nombre complexe. On appelle *racine* de a tout nombre complexe z tel que

$$z^2 = a.$$

Remarques

⇨ Si a est un réel positif, les racines de a sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$. Si a est un réel négatif, ses racines sont $i\sqrt{|a|}$ et $-i\sqrt{|a|}$.

⇨ Si $a \in \mathbb{C}$, on parlera de racine de a, mais on n'écrira jamais $\sqrt{a}$. Cette notation est réservée aux réels positifs.

Proposition 1.3.1

Soit a un nombre complexe non nul. Alors a admet exactement deux racines distinctes opposées l'une à l'autre.

Remarque

⇨ En pratique, pour trouver les racines d'un nombre complexe a, on procède ainsi
— *Si a s'exprime facilement sous forme trigonométrique.* On connaît donc $r > 0$ et θ tels que $a = re^{i\theta}$. Alors les racines de a sont $\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $-\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$.
— *Si a est sous forme cartésienne et qu'il n'est pas simple de le mettre sous forme trigonométrique.* On recherche les racines de a sous la forme $z := x + iy$ en effectuant une analyse : on suppose que z est une racine de a et on exploite le fait que $|z|^2 = |a|$ et que z^2 et a ont même partie réelle. On obtient donc

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= |a|, \\ x^2 - y^2 &= \operatorname{Re}(a). \end{aligned}$$

En résolvant ce système linéaire en x^2 et y^2, on obtient 4 couples (x, y) de solutions parmi lesquelles se trouvent les racines de a. Un argument de signe sur les parties imaginaires de z^2 et a permet d'éliminer deux candidats. La proposition précédente nous assure que les deux candidats restants sont bien racines de a.

Exercices 12

⇨ Calculer les racines carrées de $1 + i\sqrt{3}$.

⇨ Calculer les racines de $1 + i$ de deux manières différentes. En déduire une expression avec des radicaux emboîtés de $\cos(\pi/8)$, $\sin(\pi/8)$ et $\tan(\pi/8)$.

Proposition 1.3.2

Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. On considère le trinôme $az^2 + bz + c$. Son discriminant est le nombre complexe $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta \neq 0$, le trinôme admet deux racines distinctes

$$z_1 := \frac{-b+\delta}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 := \frac{-b-\delta}{2a}.$$

  où δ est une racine carrée de Δ.
- Si $\Delta = 0$, le trinôme admet une seule racine, appelée racine double

$$z_0 := -\frac{b}{2a}.$$

Vocabulaire

⇨ On parle de *solutions* d'une équation et de *racines* d'un polynôme.

Remarque

⇨ Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. On considère le trinôme $az^2 + bz + c$.

- Si $\Delta > 0$, le trinôme admet deux racines réelles distinctes

$$z_1 := \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 := \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Si $\Delta = 0$, le trinôme admet une seule racine réelle, appelée racine double

$$z_0 := -\frac{b}{2a}.$$

- Si $\Delta < 0$, le trinôme admet deux racines complexes conjuguées

$$z_1 := \frac{-b+\mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 := \frac{-b-\mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}.$$

Exercice 13

⇨ Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2\cos(\theta)z + 1 = 0$.

Proposition 1.3.3

Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$ et z_1, z_2 deux nombres complexes. Alors z_1 et z_2 sont les deux solutions, éventuellement égales, de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ si et seulement si

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \qquad \text{et} \qquad z_1 z_2 = \frac{c}{a}.$$

Remarque

⇨ Si $P, S \in \mathbb{C}$, les solutions du système

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = S \\ z_1 z_2 = P, \end{cases}$$

sont (ω_1, ω_2) et (ω_2, ω_1) où ω_1 et ω_2 sont les racines du trinôme $z^2 - Sz + P = 0$.

Exercice 14

⇨ Résoudre sur $\mathbb{C}$ le système

$$\begin{cases} a + b = 3\mathrm{i} \\ ab = -3 - \mathrm{i}. \end{cases}$$

1.3.2 Racines n-ièmes

Définition 1.3.2

Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}$, on appelle *racine n-ième* de a tout nombre complexe z tel que $z^n = a$. Les racines n-ièmes de 1 sont appelées *racines n-ièmes de l'unité* et l'ensemble de ces racines est noté $\mathbb{U}_n$.

Remarque

⇨ Les racines n-ièmes de 1 sont de module 1. Autrement dit, $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$.

Proposition 1.3.4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe exactement n racines n-ièmes de l'unité. En posant $\omega := e^{i\frac{2\pi}{n}}$, ce sont

$$1, \omega, \ldots, \omega^{n-1}.$$

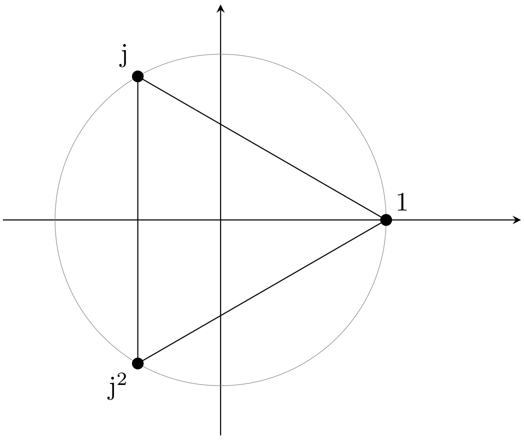
Remarques

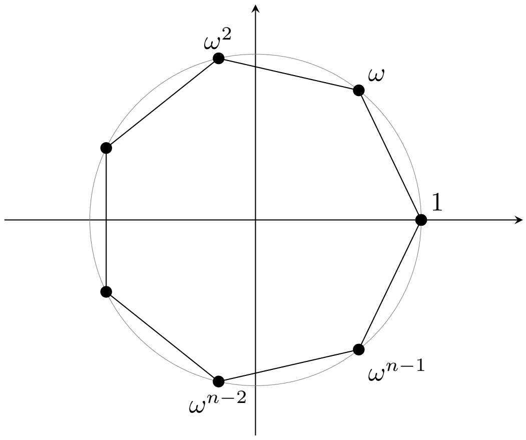
⇨ Lorsque l'on doit calculer des expressions faisant intervenir des racines n-ièmes, il est souvent plus efficace de les manipuler via leur propriété ($z^n = 1$) plutôt que par leur description ($z = \omega^k$). On ne se rabat sur la description que lorsque la relation $z^n = 1$ ne suffit pas, ou en toute fin de calcul.

⇨ Dans le cas où $n = 3$, ω est noté j. Les racines 3-ièmes de l'unité sont donc $1, j, j^2$. Lorsqu'on travaille avec le nombre complexe j, on exploite les relations

$$j^3 = 1, \qquad 1 + j + j^2 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{j} = \bar{j} = j^2.$$

⇨ Les racines n-ièmes de l'unité forment un polygone régulier à n côtés.





Exercices 15

⇨ Que dire de deux nombres complexes $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $a^3 = b^3$?

⇨ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation

$$(z+1)^n = (z-1)^n.$$

⇨ Calculer

$$\sum_{z \in \mathbb{U}_n} |z - 1|.$$

Proposition 1.3.5

Soit $n \geqslant 2$ et ζ une racine n-ième de l'unité, différente de 1. Alors

$$1 + \zeta + \cdots + \zeta^{n-1} = 0.$$

En particulier, la somme des racines n-ièmes de l'unité est nulle.

Proposition 1.3.6

Soit $a \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors a admet exactement n racines n-ièmes. En posant $\omega := e^{i\frac{2\pi}{n}}$, si z_0 est une racine n-ième de a, les racines n-ièmes de a sont

$$z_0, \omega z_0, \ldots, \omega^{n-1} z_0.$$

Remarques

⇨ Si $a = re^{i\theta}$ est sous forme trigonométrique, alors

$$z_0 = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta}{n}}$$

est une racine n-ième de a.

⇨ Si $n \geqslant 2$, la somme des racines n-ièmes d'un nombre complexe est nulle.

Exercices 16

⇨ Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation
$$27\,(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0.$$

⇨ En considérant les racines 7-ièmes de -1, montrer que
$$\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}.$$

1.4 Nombres complexes et géométrie plane

1.4.1 Le plan complexe

Définition 1.4.1

Soit $\mathcal{P}$ le plan euclidien orienté et $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ un repère orthonormé direct.

— Si M est un point du plan de coordonnées $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
$$\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{e_1} + y\,\overrightarrow{e_2}$$
on appelle *affixe* de M le nombre complexe $x + \mathrm{i}y$.

— Si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur de coordonnées $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
$$\overrightarrow{u} = x\,\overrightarrow{e_1} + y\,\overrightarrow{e_2}$$
on appelle *affixe* de $\overrightarrow{u}$ le nombre complexe $x + \mathrm{i}y$.

Proposition 1.4.1

— Soit A et B deux points du plan d'affixes respectives a et $b \in \mathbb{C}$. Alors $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $b - a$.

— Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs d'affixes respectives u et $v \in \mathbb{C}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda\,\overrightarrow{u} + \mu\,\overrightarrow{v}$ a pour affixe $\lambda u + \mu v$.

Proposition 1.4.2

Soit a et b deux nombres complexes. Alors $|a - b|$ est la distance entre les points d'affixes a et b.

Proposition 1.4.3

Soit A, B, C trois points deux à deux distincts d'affixes respectives a, b, c. Alors
$$\left|\frac{c-a}{b-a}\right| = \frac{AC}{AB} \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \ [2\pi].$$

Proposition 1.4.4

Soit A, B, C trois points deux à deux distincts d'affixes respectives a, b, c. Alors

— A, B, C sont alignés si et seulement si
$$\frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}.$$

— (AC) et (AB) sont orthogonales si et seulement si
$$\frac{c-a}{b-a} \in \mathrm{i}\mathbb{R}.$$

Remarques

⇨ Soit A, B, C trois points d'affixes respectives a, b, $c \in \mathbb{C}$. Si A, B, C sont deux à deux distincts, alors

$$\begin{aligned} A,\ B,\ C \text{ sont alignés} &\iff \frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R} \\ &\iff \frac{c-a}{b-a} = \overline{\left(\frac{c-a}{b-a}\right)} \\ &\iff (c-a)\overline{(b-a)} = \overline{(c-a)}(b-a). \end{aligned}$$

On vérifie facilement que même si A, B, C ne sont pas deux à deux distincts

$$A,\ B,\ C \text{ sont alignés} \iff (c-a)\overline{(b-a)} = \overline{(c-a)}(b-a).$$

⇨ La proposition précédente étant essentiellement utilisée de cette manière, on pourra tolérer exceptionnellement de l'appliquer, même si A, B, C ne sont pas deux à deux distincts. Ce genre de « division par zéro » est parfois tolérée en géométrie. Bien entendu, dans tout autre domaine des mathématiques ces horreurs ne seront pas tolérées.

Exercice 17

⇨ Soit $ABCD$ un quadrilatère non croisé. On construit A_1 extérieur au quadrilatère tel que le triangle BA_1C est isocèle et rectangle en A_1. De même pour B_1, C_1, D_1. Montrer que les segments $[A_1C_1]$ et $[D_1B_1]$ ont même longueur et sont orthogonaux.

1.4.2 Les similitudes directes

Définition 1.4.2

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur. On appelle *translation* de vecteur $\overrightarrow{u}$ l'application qui au point M associe l'unique point M' tel que

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}.$$

Proposition 1.4.5

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur d'affixe $u \in \mathbb{C}$. La translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ transforme le point M d'affixe z en le point M' d'affixe

$$z' = z + u.$$

Remarque

⇨ Une translation conserve les distances et les angles.

Définition 1.4.3

Soit Ω un point du plan et $\rho \in \mathbb{R}^*$. On appelle *homothétie* de centre Ω et de rapport ρ l'application qui au point M associe l'unique point M' tel que

$$\overrightarrow{\Omega M'} = \rho\overrightarrow{\Omega M}.$$

Proposition 1.4.6

Soit Ω un point du plan d'affixe $\omega \in \mathbb{C}$ et $\rho \in \mathbb{R}^*$. L'homothétie de centre Ω et de rapport ρ transforme le point M d'affixe z en le point M' d'affixe

$$z' = \rho(z - \omega) + \omega.$$

Remarque

⇨ Une homothétie multiplie les distances par $|\rho|$ et conserve les angles.

Définition 1.4.4

Soit Ω un point du plan et $\theta \in \mathbb{R}$. On appelle *rotation* de centre Ω et d'angle θ l'application qui au point M associe

— Ω si $M = \Omega$.
— l'unique point M' tel que

$$\Omega M' = \Omega M \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \theta \ [2\pi]$$

sinon.

Proposition 1.4.7

Soit Ω un point du plan d'affixe $\omega \in \mathbb{C}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. La rotation de centre Ω et d'angle θ transforme le point M d'affixe z en le point M' d'affixe

$$z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - \omega) + \omega.$$

Remarque

⇨ Une rotation conserve les distances et les angles.

Exercice 18

⇨ Quelle est l'expression en notation complexe des transformations suivantes ?
— La symétrie centrale de centre 0.
— L'homothétie de centre 0 et de rapport 2.
— L'homothétie de centre 2 et de rapport 1/2.
— La composée des deux dernières transformations.
— La rotation de centre 0 et d'angle $\pi/2$.
— La rotation de centre $1 + \mathrm{i}$ et d'angle $\pi/2$.
— La composée des deux dernières transformations.
— La symétrie orthogonale d'axe (Ox).
— La symétrie orthogonale dont l'axe $\mathcal{D}_\theta$ fait un angle θ avec l'axe (Ox).

Définition 1.4.5

Soit Ω un point du plan, $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On appelle *similitude* de centre Ω, de rapport r et d'angle θ la composée (commutative) de l'homothétie de centre Ω et de rapport r et de la rotation de centre Ω et d'angle θ.

Proposition 1.4.8

Soit Ω un point du plan d'affixe ω, $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. La similitude de centre Ω, de rapport r et d'angle θ transforme le point M d'affixe z en le point M' d'affixe

$$z' = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - \omega) + \omega.$$

Remarque

⇨ Une similitude multiplie les distances par r et conserve les angles.

Dans la suite, on confondra un point et son affixe, un vecteur et son affixe. On identifie ainsi le plan à $\mathbb{C}$.

Définition 1.4.6

On appelle *similitude directe* toute application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle qu'il existe $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ tels que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = az + b.$$

Remarque

⇨ Les translations et les similitudes de centre Ω de rapport $r \in \mathbb{R}_+^*$ et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ sont des similitudes directes. Nous allons voir que ce sont les seules.

Proposition 1.4.9

La composée de deux similitudes directes est une similitude directe.

Proposition 1.4.10

Soit f une similitude directe et $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ tels que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = az + b.$$

- Si $a = 1$, f est la translation de vecteur b.
- Sinon, il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $a = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. f admet un unique point fixe ω et

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - \omega) + \omega.$$

  Autrement dit f est la similitude de centre ω, de rapport r et d'angle θ.

Exercice 19

⇨ À quelle transformation géométrique correspond la fonction $f : z \mapsto (3 - \mathrm{i}) + 2\mathrm{i}z$?

Chapitre 2

Logique, ensembles

« Si la logique est l'hygiène du mathématicien, ce n'est pas elle qui lui fournit sa nourriture ; le pain quotidien dont il vit, ce sont les grands problèmes. »

— André Weil (1906-1998)

« Sur l'enseigne du barbier du village, on peut lire : Je rase tous les hommes du village qui ne se rasent pas eux-mêmes, et seulement ceux-là. Savez-vous qui rase le barbier ? »

— Bertrand Russel (1872–1970)

« J'aimais et j'aime encore les mathématiques pour elles-mêmes comme n'admettant pas l'hypocrisie et le vague, mes deux bêtes d'aversion. »

— Stendhal (1783-1842)

2.1 Éléments de logique

2.1.1 Assertion, prédicat

Définition 2.1.1

— On appelle *assertion* toute phrase mathématique à laquelle on peut attribuer une et une seule valeur de vérité : vrai ou faux.
— Soit E un ensemble. On appelle *prédicat* sur E toute phrase mathématique dont la valeur de vérité dépend d'un élément $x \in E$.

Exemples

⇨ « 7 est un nombre premier » est une assertion vraie. L'assertion « 7 est divisible par 3 » est fausse.

⇨ $P(x) :=$ « x est rationnel » est un prédicat sur $\mathbb{R}$. $P(3/4)$ est vrai alors que $P(\sqrt{2})$ est faux.

⇨ $P(a, b, c) :=$ « $a^2 + b^2 = c^2$ » est un prédicat sur $\mathbb{N}^3$.

⇨ « L'ensemble des nombres premiers est infini » est une assertion vraie. L'assertion « Il existe une infinité de nombres premiers p tels que $p + 2$ est premier » est une assertion dont on pense qu'elle est vraie. Mais aujourd'hui, personne n'en a fait la preuve.

Remarques

⇨ Deux principes fondamentaux gouvernent les valeurs de vérité des assertions.
— Le *principe de non-contradiction* : Une assertion ne peut être à la fois vraie et fausse.
— Le *principe du tiers exclu* : Une assertion qui n'est pas vraie est fausse.

⇨ Si P est un prédicat, on dit que P est vrai lorsque quel que soit $x \in E$, $P(x)$ est vraie. Dire que P n'est pas vrai signifie qu'il existe $x \in E$ tel que $P(x)$ est faux.

Définition 2.1.2

— Le *quantificateur universel* $\forall$ signifie « pour tout »
— Le *quantificateur existentiel* $\exists$ signifie « il existe (au moins) un »

Remarque

⇨ On trouve parfois le quantificateur $\exists!$ qui signifie « il existe un unique ».

Exercices 1

⇨ Les assertions suivantes sont-elles vraies ?

1. $\forall y \in \mathbb{R}, \quad \exists x \in \mathbb{R}, \quad x + y \geqslant 0.$
2. $\exists x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad x + y \geqslant 0.$
3. $\exists x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad y^2 \geqslant x.$

⇨ Déterminer les $x \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x^{n+2} \leqslant x^{n+1} + x^n.$$

Définition 2.1.3

Soit P et Q deux assertions.
— On définit l'assertion (non P) comme étant vraie lorsque P est fausse et fausse lorsque P est vraie.
— On définit l'assertion $[P \;\text{ et }\; Q]$ comme étant vraie lorsque P et Q sont vraies et fausse sinon.
— On définit l'assertion $[P \;\text{ ou }\; Q]$ comme étant vraie lorsqu'au moins l'une des deux assertions est vraie, et fausse sinon.

Remarques

⇨ Les valeurs de vérité de ces assertions sont données par les tables suivantes.

P	V	F
non P	F	V

non P

P \ Q	V	F
V	V	F
F	F	F

P et Q

P \ Q	V	F
V	V	V
F	V	F

P ou Q

- Lorsque le menu d'un restaurant vous propose « fromage ou dessert », le « ou » est employé au sens strict (on dit aussi exclusif) ; il n'est pas possible d'avoir les deux. En mathématiques, le « ou » est employé au sens large (on dit aussi inclusif). Lorsqu'on dit qu'un entier naturel n est divisible par 2 ou par 3, il peut très bien être divisible par 2 et par 3.

2.1.2 Implication, équivalence

Définition 2.1.4

Soit P et Q deux assertions. On définit l'assertion $P \Longrightarrow Q$ comme étant fausse lorsque P est vraie et Q est fausse, et vraie sinon.

Remarques

- Montrer $P \Longrightarrow Q$ revient à prouver que si P est vraie, alors Q est vraie.
- Si P et Q sont deux prédicats sur E, $P \Longrightarrow Q$ signifie que $Q(x)$ est vraie dès que $P(x)$ est vraie. Si c'est le cas, on écrit

$$\forall x \in E, \quad P(x) \Longrightarrow Q(x)$$

et on dit que P est une condition suffisante pour Q ou que Q est une condition nécessaire pour P.

Exercices 2

- Dans les exemples suivants, dites si le prédicat P est une condition nécessaire ou une condition suffisante pour Q.
  — $E = \mathbb{R}$, $P(x) :=$ « $x \in \mathbb{Q}$ » et $Q(x) :=$ « $x^2 \in \mathbb{Q}$ ».
  — E est l'ensemble des triangles du plan, $P(T) :=$ « T est isocèle » et $Q(T) :=$ « T est équilatéral ».
  — $E = \mathbb{R}^2$, $P(x, y) :=$ « $x \equiv y\ [2\pi]$ » et $Q(x, y) :=$ « $x \equiv y\ [\pi]$ ».
- Montrer que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad [xy > 0 \quad \text{et} \quad x + y > 0] \quad \Longrightarrow \quad [x > 0 \quad \text{et} \quad y > 0].$$

- Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left[\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad |x| \leqslant \varepsilon\right] \quad \Longrightarrow \quad x = 0.$$

Proposition 2.1.1: Modus Ponens

Soit P et Q deux assertions. Si P et $P \Longrightarrow Q$ sont vraies, alors Q est vraie.

Remarque

- En pratique, on utilise cette proposition lorsque P et Q sont des prédicats. Si $P \Longrightarrow Q$ est vrai et x est un élément de E tel que $P(x)$ est vrai, alors $Q(x)$ est vrai. Dans ce cadre, on dit que $P \Longrightarrow Q$ est un théorème. Vérifier les hypothèses du théorème revient à vérifier que $P(x)$ est vrai et appliquer le théorème nous permet de conclure que $Q(x)$ est vrai. Traduisons mathématiquement le raisonnement suivant : « Socrate est un homme. Puisque tous les hommes sont mortels, alors Socrate est mortel ». Si $P(x) :=$ « x est un homme » et $Q(x) :=$ « x est mortel », alors l'énoncé « Tous les hommes sont mortels » s'écrit

$$\forall x \in U, \quad P(x) \Longrightarrow Q(x).$$

Puisque Socrate est un homme (P (Socrate) est vrai), on en déduit que Socrate est mortel (Q (Socrate) est vrai).

Exercice 3

- Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x < a \quad \Longrightarrow \quad x \leqslant b.$$

Montrer que $a \leqslant b$.

Définition 2.1.5

Soit P et Q deux assertions. On définit l'assertion $P \Longleftrightarrow Q$ comme étant vraie lorsque P et Q ont même valeur de vérité, et fausse sinon.

Remarques

- Les valeurs de vérité des assertions $P \Longrightarrow Q$ et $P \Longleftrightarrow Q$ sont regroupées dans les tableaux suivants.

P \ Q	V	F
V	V	F
F	V	V

$P \Longrightarrow Q$

P \ Q	V	F
V	V	F
F	F	V

$P \Longleftrightarrow Q$

- Les assertions $P \Longleftrightarrow Q$ et $Q \Longleftrightarrow P$ ont même valeur de vérité ; on dit que la relation d'équivalence est symétrique.
- Si P et Q sont deux prédicats sur E, dire que $P \Longleftrightarrow Q$ est vrai signifie que $Q(x)$ et $P(x)$ ont même valeur de vérité quel que soit $x \in E$. Si c'est le cas, on écrit

$$\forall x \in E, \quad P(x) \Longleftrightarrow Q(x)$$

et on dit que P est une condition nécessaire et suffisante pour Q.

Proposition 2.1.2

Soit P et Q deux assertions. Alors $P \Longleftrightarrow Q$ et $[(P \Longrightarrow Q)$ et $(Q \Longrightarrow P)]$ ont même valeur de vérité.

Remarque

- Pour démontrer que $P \Longleftrightarrow Q$, on pourra démontrer que $P \Longrightarrow Q$, puis que $Q \Longrightarrow P$; on dit qu'on raisonne par double implication.

Exercice 4

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) := \sin(\lambda x).$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que f soit 2π-périodique.

Proposition 2.1.3

Soit P, Q, R trois assertions. Alors

$$\begin{aligned} [P \text{ et } (Q \text{ ou } R)] &\Longleftrightarrow [(P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)], \\ [P \text{ ou } (Q \text{ et } R)] &\Longleftrightarrow [(P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R)]. \end{aligned}$$

Proposition 2.1.4: Lois de De Morgan

Soit P et Q deux assertions. Alors

$$\begin{aligned} \text{non } (P \text{ et } Q) &\Longleftrightarrow [(\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q)], \\ \text{non } (P \text{ ou } Q) &\Longleftrightarrow [(\text{non } P) \text{ et } (\text{non } Q)], \\ \text{non } (\text{non } P) &\Longleftrightarrow P. \end{aligned}$$

Proposition 2.1.5: Raisonnement par contraposée

Soit P et Q deux assertions. Alors

$$[P \Longrightarrow Q] \quad \Longleftrightarrow \quad [\text{non } Q \Longrightarrow \text{non } P].$$

Remarque

- Lorsque l'on démontre $[(\text{non } Q) \Longrightarrow (\text{non } P)]$ pour montrer que $[P \Longrightarrow Q]$, on dit que l'on raisonne par contraposée.

Exercice 5

- Supposons que l'on ait montré que π^2 est irrationnel. Peut-on en déduire que π est irrationnel ?

Proposition 2.1.6

Soit P et Q deux assertions. Alors

$$[\text{non } (P \Longrightarrow Q)] \quad \Longleftrightarrow \quad [P \quad \text{et} \quad (\text{non} \quad Q)]\,.$$

Proposition 2.1.7

Soit P un prédicat sur l'ensemble E. Alors

$$\begin{aligned} \text{non } [\forall x \in E, \quad P(x)] \quad &\Longleftrightarrow \quad [\exists x \in E, \quad \text{non } (P(x))]\,, \\ \text{non } [\exists x \in E, \quad P(x)] \quad &\Longleftrightarrow \quad [\forall x \in E, \quad \text{non } (P(x))]\,. \end{aligned}$$

Exercice 6

⇨ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Écrire les phrases suivantes avec des quantificateurs. En déduire leur négation.

« f est majorée », « f est croissante », « f est décroissante ».

2.2 Ensembles

2.2.1 Ensemble, élément

Définition 2.2.1

Les notions d'*ensemble*, d'*élément* et d'*appartenance* sont des notions premières en mathématiques que l'on ne définit pas. Intuitivement, un ensemble est une collection d'objets mathématiques appelés éléments. La notation $x \in E$ signifie que l'élément x appartient à l'ensemble E.

Remarque

⇨ Si $x_1, \dots, x_n$ sont des objets mathématiques, l'ensemble constitué de ces éléments est noté $\{x_1, \dots, x_n\}$.

Définition 2.2.2

Soit A et B deux ensembles. On dit que A est *inclus* dans B et on note $A \subset B$ lorsque

$$\forall x \in A, \quad x \in B.$$

Proposition 2.2.1

Deux ensembles A et B sont égaux lorsqu'ils possèdent les mêmes éléments, c'est-à-dire lorsque

$$A \subset B \quad \text{et} \quad B \subset A.$$

Remarque

⇨ En particulier $\{0, 1\} = \{1, 0\}$ et $\{0, 0, 1\} = \{0, 1\}$.

Définition 2.2.3

Soit E un ensemble. On appelle partie de E tout ensemble A inclus dans E. L'ensemble des parties de E est noté $\mathcal{P}(E)$.

Remarque

⇨ Un même objet mathématique peut très bien, selon le contexte, être un élément ou un ensemble. Par exemple, l'ensemble $\mathbb{N}$ est un élément de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Exercice 7

⇨ Déterminer $\mathcal{P}(\{1, 2\})$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing))$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing)))$.

2.2.2 Opérations élémentaires

Définition 2.2.4

Soit E un ensemble et P un prédicat sur E. On définit

$$\{x \in E \mid P(x)\}$$

comme l'ensemble des éléments x de E tels que $P(x)$ est vrai. C'est une partie de E.

Définition 2.2.5

Soit A et B deux parties de E. On définit

$$A \cap B := \{x \in E \mid x \in A \quad \text{et} \quad x \in B\}, \qquad A \cup B := \{x \in E \mid x \in A \quad \text{ou} \quad x \in B\},$$

$$\overline{A} := \{x \in E \mid x \notin A\}.$$

Remarques

⇨ Le complémentaire de A dans E est aussi noté A^c.

⇨ On dit que deux ensembles A et B sont disjoints lorsque $A \cap B = \varnothing$.

Proposition 2.2.2

Soit A et B deux parties de E. Alors

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C), \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C). \end{aligned}$$

Proposition 2.2.3: Lois de De Morgan

Soit A et B deux parties de E. Alors

$$\begin{aligned} \overline{A \cap B} &= \overline{A} \cup \overline{B}, \\ \overline{A \cup B} &= \overline{A} \cap \overline{B}, \\ \overline{\overline{A}} &= A. \end{aligned}$$

Exercice 8

⇨ Soit A, B, C trois parties d'un ensemble E non vide.

1. Si $A \cup B = A \cup C$, a-t-on $B = C$?
2. Si $A \cup B = A \cap B$, a-t-on $A = B$?
3. Montrer que si $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$, alors $B = C$.
4. Montrer que si $A \cup B = E$ et $A \cap B = \varnothing$, alors $A = \overline{B}$ et $B = \overline{A}$.

Définition 2.2.6

Soit A et B deux parties de E. On définit

$$A \setminus B := \{x \in E \mid x \in A \quad \text{et} \quad x \notin B\}.$$

Remarque

⇨ En particulier, si A est une partie de E, $\bar{A} = E \setminus A$.

Définition 2.2.7

Soit A et B deux ensembles. On définit $A \times B$ comme l'ensemble des *couples* (a, b) avec $a \in A$ et $b \in B$. Par définition, deux couples $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A \times B$ sont égaux lorsque $a_1 = a_2$ et $b_1 = b_2$.

Définition 2.2.8

— Si $A_1, \ldots, A_n$ sont n ensembles, on définit $A_1 \times \cdots \times A_n$ comme l'ensemble des n-uplets $(a_1, \ldots, a_n)$ avec $a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n$. Par définition, deux n-uplets $(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n) \in A_1 \times \cdots \times A_n$ sont égaux lorsque

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad a_k = b_k.$$

— Si A est un ensemble et $n \in \mathbb{N}$, on définit A^n comme

$$A^n := \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ fois } A}.$$

Remarques

⇨ A^1 est l'ensemble des 1-uplets (a), pour $a \in A$; on confondra cet ensemble avec A. Quant à A^0, c'est l'ensemble qui contient un unique élément : le 0-uplet $()$.

⇨ Pour énoncer qu'un prédicat portant sur deux variables est vrai, on peut écrire « $\forall x \in A, \forall y \in A, P(x, y)$ ». On condense cependant souvent cette phrase en « $\forall (x, y) \in A^2, P(x, y)$ » ou « $\forall x, y \in A, P(x, y)$ ».

2.3 Applications

2.3.1 Définitions, exemples

Définition 2.3.1

Soit E et F deux ensembles. Une *application* f de E dans F associe à tout élément $x \in E$ un unique élément $f(x) \in F$, appelé image de x par f. On note

$$f: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x). \end{array}$$

On dit que E est le *domaine* de f et que F est son *codomaine*. L'ensemble des applications de E dans F est noté $\mathcal{F}(E, F)$.

Remarques

⇨ Deux applications sont égales lorsqu'elles ont même domaine et codomaine et qu'elles prennent la même valeur en chaque point de ce domaine.

⇨ On utilise aussi les expressions « ensemble de départ » et « ensemble d'arrivée » d'une application pour désigner respectivement son domaine et son codomaine.

⇨ « application » et « fonction » sont synonymes. L'usage veut cependant que l'on réserve le mot « fonction » aux applications dont le domaine et le codomaine sont des parties de $\mathbb{C}$.

⇨ L'ensemble $\mathcal{F}(E, F)$ est aussi noté F^E.

⇨ Pour les fonctions usuelles, il arrive qu'on omette les parenthèses et qu'on écrive $\sin x$ au lieu de $\sin(x)$, ce qu'on ne se permettra pas avec les autres fonctions.

Définition 2.3.2

Soit A une partie de E. On appelle *fonction caractéristique* de A et on note $\mathbb{1}_A$ l'application de E dans $\{0, 1\}$ définie par

$$\forall x \in E, \quad \mathbb{1}_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarques

⇨ Deux parties A et B de E sont égales si et seulement si $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$.

⇨ Si A et B sont deux parties de E, alors

$$\forall x \in E, \quad \mathbb{1}_{A \cap B}(x) = \mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x) \quad \text{et} \quad \mathbb{1}_{A \cup B}(x) = \max(\mathbb{1}_A(x), \mathbb{1}_B(x)).$$

Définition 2.3.3

Si f est une application de E dans F, on appelle *graphe* de f l'ensemble

$$\{(x, y) \in E \times F \mid f(x) = y\}.$$

Définition 2.3.4

Soit $f : E \to F$ et $y \in F$. On appelle *antécédent* de y tout élément $x \in E$ tel que $f(x) = y$.

Exercice 9

- ⇨ Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui au couple (x, y) associe le couple $(x + 2y, xy)$. Déterminer les antécédents de $(3, 1)$.

Définition 2.3.5

Soit $f : E \to F$.

- Soit B une partie de F. On appelle *image réciproque* de B par f et on note $f^{-1}(B)$ l'ensemble des éléments de E dont l'image par f est dans B.

$$f^{-1}(B) := \{x \in E \mid f(x) \in B\}$$

- Soit A une partie de E. On appelle *image directe* de A par f et on note $f(A)$ l'ensemble des éléments de F qui sont image d'un élément de A par f.

$$f(A) := \{y \in F \mid \exists x \in A, \quad f(x) = y\}$$

L'ensemble $f(E)$ est appelé image de f et noté $\operatorname{Im} f$.

Remarque

- ⇨ L'ensemble image $f(A)$ est aussi noté

$$\{f(x) : x \in A\}.$$

Exercices 10

- ⇨ On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin x$. Déterminer $f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right)$, $f^{-1}\left(f\left(\left[0, \frac{\pi}{6}\right]\right)\right)$, $f(f^{-1}([-1, 2]))$.
- ⇨ Soit f une application de E dans F. Si A est une partie de E, comparer $f^{-1}(f(A))$ et A. De même, si B est une partie de F, comparer $f(f^{-1}(B))$ et B.
- ⇨ Soit f la fonction de $\mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}\}$ dans $\mathbb{C}$ qui à z associe $\frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}$. Calculer $f^{-1}(\mathbb{U})$.
- ⇨ Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) := \frac{x}{1 + x^2}.$$

En lisant le tableau de variations de f, intuiter $f(\mathbb{R})$, puis prouver rigoureusement ce résultat.

Définition 2.3.6

Soit f une application de E dans F.

- Si A est une partie de E, l'application

$$f\big|_A : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

est appelée *restriction* de f à A.
- On dit qu'une application g est un *prolongement* de f lorsque f est une restriction de g.
- Si B est une partie de F telle que

$$\forall x \in E, \quad f(x) \in B$$

l'application

$$f\big|^B : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & B \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

est appelée *corestriction* de f à B.

Remarque

⇨ Soit $f : E \to F$, A une partie de E et B une partie de F telles que

$$\forall x \in A, \quad f(x) \in B.$$

Alors, on peut définir l'application

$$f|_A^B : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

appelée restriction de f à A, corestreinte à B.

Définition 2.3.7

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$. On définit l'application $g \circ f$ de E dans G par

$$\forall x \in E, \quad (g \circ f)(x) := g\left(f(x)\right).$$

Remarque

⇨ Si A est une partie de E, alors $(g \circ f)(A) = g(f(A))$. De même, si B est une partie de F, alors

$$(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B)).$$

Proposition 2.3.1

Soit $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$. Alors

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

On note cette application $h \circ g \circ f$.

2.3.2 Application injective, surjective, bijective

Définition 2.3.8

Soit $f : E \to F$. On dit que f est *injective* lorsque

$$\forall x_1, x_2 \in E, \quad f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

c'est-à-dire lorsque tout élément de F a au plus un antécédent.

Exercices 11

⇨ Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que si f est strictement monotone alors elle est injective. La réciproque est-elle vraie ?

⇨ Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que : $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |f(x) - f(y)| \geqslant |x - y|$. Montrer qu'elle est injective.

⇨ Soit φ l'application qui à la fonction f de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$ associe la fonction $\varphi(f)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad [\varphi(f)](x) := f(\sin x)$$

Montrer que φ est injective.

⇨ Soit E un ensemble et A une partie de E. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ X & \longmapsto & X \cap A \end{array}$$

soit injective.

Définition 2.3.9

Soit $f : E \to F$. On dit que f est *surjective* lorsque

$$\forall y \in F, \quad \exists x \in E, \quad f(x) = y$$

c'est-à-dire lorsque tout élément de F a au moins un antécédent.

Proposition 2.3.2

Une application $f : E \to F$ est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} f = F$.

Exercice 12

⇨ L'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(0) \end{array}$$

est-elle injective ? surjective ?

Définition 2.3.10

On dit qu'une application $f : E \to F$ est *bijective* lorsqu'elle est injective et surjective, c'est-à-dire lorsque tout élément de F possède un unique antécédent.

Méthode : Pour prouver qu'une fonction est bijective, on peut donc pour y quelconque dans l'ensemble d'arrivée résoudre $f(x) = y$ pour x dans l'ensemble de départ. Si on trouve une unique solution, on a montré que f était bijective. Très souvent, on obtiendra même l'expression de x en fonction de y, ce qui nous donnera l'expression de la bijection réciproque.

Exercices 13

⇨ Un élève a voulu appliquer cette méthode pour montrer que la fonction $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \setminus \{-1\} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1 + \mathrm{i}x}{1 - \mathrm{i}x} \end{array}$ était bijective. Voici sa rédaction :
Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} g(x) = z &\iff \frac{1 + \mathrm{i}x}{1 - \mathrm{i}x} = z \\ &\iff 1 + \mathrm{i}x = z(1 - \mathrm{i}x) \\ &\iff x(\mathrm{i} + \mathrm{i}z) = z - 1 \\ &\underbrace{\iff}_{z \neq -1} x = -i\frac{z - 1}{z + 1}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour chaque $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$, on a trouvé un unique antécédent, donc g est bijective.
Qu'en pensez-vous ?

⇨ Montrer que la fonction f qui à x associe $\frac{1+\mathrm{i}x}{1-\mathrm{i}x}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U} \setminus \{-1\}$.

⇨ Soit X un ensemble et $f : X^2 \to X$ une bijection. Montrer que

$$g : \begin{array}{ccc} X^3 & \longrightarrow & X \\ (x, y, z) & \longmapsto & f(x, f(y, z)) \end{array}$$

est bijective.

Proposition 2.3.3

— La composée de deux applications injectives est injective.
— La composée de deux applications surjectives est surjective.
— La composée de deux applications bijectives est bijective.

Exercices 14

⇨ Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective. De même, montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

⇨ Est-il vrai que si $g \circ f$ est bijective, f et g le sont ?

Définition 2.3.11

Soit E un ensemble. On appelle *identité* et on note Id_E l'application de E dans E définie par

$$\forall x \in E, \quad \mathrm{Id}_E(x) := x.$$

Si f est une application de E dans F

$$f \circ \mathrm{Id}_E = f \quad \text{et} \quad \mathrm{Id}_F \circ f = f.$$

Proposition 2.3.4

Soit f une application de E dans F.

— L'application f est bijective si et seulement si il existe une application $g : F \to E$ telle que

$$g \circ f = \mathrm{Id}_E \quad \text{et} \quad f \circ g = \mathrm{Id}_F.$$

Si tel est le cas, g est unique ; on l'appelle *bijection réciproque* de f et on la note f^{-1}.

— Si $f : E \to F$ est bijective, f^{-1} est bijective et $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

Remarque

⇨ La fonction ln de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ est une bijection et sa bijection réciproque est la fonction exp de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

Exercices 15

⇨ Montrer que l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^2 & \longrightarrow & \mathbb{Z}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (2x + y, 5x + 3y) \end{array}$$

est bijective et calculer f^{-1}.

⇨ Soit f une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que si f est strictement croissante, il en est de même pour f^{-1}. Que dire si f est impaire ?

Proposition 2.3.5

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications bijectives. Alors $g \circ f$ est bijective et

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

2.3.3 Familles

Si E est un ensemble, il est courant de se donner n éléments $f_1, \ldots, f_n$ de E. Cela revient à définir une application

$$f : \begin{array}{ccc} [\![1, n]\!] & \longrightarrow & E \\ i & \longmapsto & f(i) \end{array}$$

où l'on pose $f(i) := f_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Nous dirons que f est une famille d'éléments de E indexée par $[\![1, n]\!]$. On peut généraliser ce principe et construire des familles indexées par un ensemble quelconque. Par exemple, on peut considérer l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, qui à $\lambda \in \mathbb{R}$ associe la fonction $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_\lambda(x) := \mathrm{e}^{\lambda x}.$$

On a ainsi défini une famille d'éléments de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ indexée par $\mathbb{R}$.

Définition 2.3.12

Soit E un ensemble et I un ensemble, appelé ensemble d'indices. On appelle *famille d'éléments de E indexée par I* toute application

$$f : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & E \\ i & \longmapsto & f_i. \end{array}$$

Cette application est notée $(f_i)_{i \in I}$. L'ensemble des familles d'éléments de E indexées par I est noté E^I.

Remarques

⇨ Une famille d'éléments de E indexée par $\mathbb{N}$ est une suite d'éléments de E.

⇨ On appelle sous-famille d'une famille $(f_i)_{i\in I}$ toute famille de la forme $(f_i)_{i\in J}$ où J est une partie de I.

⇨ Si A est un ensemble, on dit qu'une famille $(f_i)_{i\in I}$ est la famille des éléments de A lorsque f est une bijection de I dans A. Le fait de parler de « la » famille des éléments de A est un abus de langage car cette famille n'est pas unique.

Définition 2.3.13

Soit E un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E. On définit alors

$$\bigcap_{i\in I} A_i \coloneqq \{x \in E \mid \forall i \in I, \quad x \in A_i\},$$

$$\bigcup_{i\in I} A_i \coloneqq \{x \in E \mid \exists i \in I, \quad x \in A_i\}.$$

Proposition 2.3.6

Soit E un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E. Alors

$$\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{A_i} \quad \text{et} \quad \overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}.$$

Définition 2.3.14: Partition

Soit E un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E. On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est une *partition* de E lorsque

$$E = \bigcup_{i\in I} A_i \qquad \text{et} \qquad [\forall i, j \in I, \quad i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \varnothing].$$

Remarques

⇨ La définition de partition peut varier d'un cours à l'autre. Dans certains cours, on demande en plus que les A_i soient non vides ; on appelle alors *recouvrement disjoint* ce que nous appelons ici partition.

⇨ La notion de partition a été définie à l'aide de familles. Mais on peut aussi la définir de manière ensembliste ; on dit qu'une partie $\mathcal{R}$ de $\mathcal{P}(E)$ est une *partition (au sens ensembliste)* de E lorsque
— $\forall x \in E, \quad \exists A \in \mathcal{R}, \quad x \in A$.
— $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{R}, \quad A_1 \neq A_2 \Longrightarrow A_1 \cap A_2 = \varnothing$.
— $\forall A \in \mathcal{R}, \quad A \neq \varnothing$.
Remarquons que dans la définition ensembliste, on demande à ce que les ensembles appartenant à $\mathcal{R}$ soient non vides.

Exercice 16

⇨ Déterminer les partitions (au sens ensembliste) de $E \coloneqq \{1, 2, 3\}$.

2.4 Relation binaire

Définition 2.4.1

Soit E un ensemble. On appelle *relation binaire* sur E tout prédicat $\mathcal{R}$ défini sur $E \times E$. Si x et y sont deux éléments de E et $\mathcal{R}(x, y)$ est vrai, on écrit $x\mathcal{R}y$.

Définition 2.4.2

On dit qu'une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est
— *réflexive* lorsque

$$\forall x \in E, \quad x\mathcal{R}x.$$

— *transitive* lorsque

$$\forall x, y, z \in E, \quad [x\mathcal{R}y \quad \text{et} \quad y\mathcal{R}z] \Longrightarrow x\mathcal{R}z.$$

— *symétrique* lorsque
$$\forall x, y \in E, \quad x\mathcal{R}y \Longrightarrow y\mathcal{R}x.$$
— *antisymétrique* lorsque
$$\forall x, y \in E, \quad [x\mathcal{R}y \quad \text{et} \quad y\mathcal{R}x] \Longrightarrow x = y.$$

2.4.1 Relation d'ordre

Définition 2.4.3

On dit qu'une relation binaire $\preceq$ est une *relation d'ordre* lorsqu'elle est
— réflexive : $\forall x \in E, \quad x \preceq x.$
— transitive : $\forall x, y, z \in E, \quad [x \preceq y \quad \text{et} \quad y \preceq z] \Longrightarrow x \preceq z.$
— antisymétrique : $\forall x, y \in E, \quad [x \preceq y \quad \text{et} \quad y \preceq x] \Longrightarrow x = y.$
On appelle *ensemble ordonné* tout ensemble muni d'une relation d'ordre.

Remarques

⇨ La relation $\leqslant$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$. La relation $\leqslant$ définie sur $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par
$$\forall f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad f \leqslant g \quad \Longleftrightarrow \quad [\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leqslant g(x)]$$
est une relation d'ordre sur $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

⇨ Si E est un ensemble, la relation d'inclusion est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(E)$.

⇨ Si $\preceq$ est une relation d'ordre sur E, la relation $\succeq$ définie par
$$\forall x, y \in E, \quad x \succeq y \quad \Longleftrightarrow \quad y \preceq x$$
est une relation d'ordre appelée relation d'ordre opposée à la première.

⇨ La relation $<$ n'est pas une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ car elle n'est pas réflexive.

Exercice 17

⇨ Montrer que la relation $|$ définie sur $\mathbb{N}$ par
$$\forall a, b \in \mathbb{N}, \quad a|b \quad \Longleftrightarrow \quad [\exists k \in \mathbb{N}, \quad b = ka]$$
est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$.

Définition 2.4.4

On dit qu'une relation d'ordre $\preceq$ est totale lorsque
$$\forall x, y \in E, \quad x \preceq y \quad \text{ou} \quad y \preceq x.$$

Remarque

⇨ La relation d'ordre $\leqslant$ est totale sur $\mathbb{R}$. Par contre, les relations $\leqslant$ sur $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\subset$ sur $\mathcal{P}(E)$ et $|$ sur $\mathbb{N}$ ne sont pas totales.

Définition 2.4.5

Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.
— On dit que $M \in E$ est un *majorant* de A lorsque
$$\forall a \in A, \quad a \preceq M.$$
— On dit que $m \in E$ est un *minorant* de A lorsque
$$\forall a \in A, \quad m \preceq a.$$

Exercice 18

⇨ Soit $c > 0$. On définit la relation $\preceq$ sur $\mathbb{R}^2$ par
$$\forall (x, t), (x', t') \in \mathbb{R}^2, \quad (x, t) \preceq (x', t') \quad \Longleftrightarrow \quad |x' - x| \leqslant c \cdot (t' - t).$$
Vérifier que c'est une relation d'ordre. Dessiner l'ensemble des majorants et des minorants d'un couple

(x_0, t_0). L'ordre est-il total ?

Définition 2.4.6

Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.
— On dit que A admet un *plus grand élément* lorsqu'il existe un majorant de A appartenant à A. Si un tel élément existe, il est unique et on l'appelle plus grand élément de A.
— On dit que A admet un *plus petit élément* lorsqu'il existe un minorant de A appartenant à A. Si un tel élément existe, il est unique et on l'appelle plus petit élément de A.

Exemples

⇨ Muni de l'ordre usuel, $[0, 1[$ admet un plus petit élément 0 mais n'admet pas de plus grand élément.

⇨ Muni de la relation de divisibilité, 0 est le plus grand élément de $\mathbb{N}$ et 1 son plus petit élément. En revanche, $\{2, 3\}$ n'admet ni de plus grand ni de plus petit élément. L'ensemble des majorants de $\{2, 3\}$ est d'ailleurs $6\mathbb{N}$.

Remarques

⇨ Un ensemble admettant un plus petit ou un plus grand élément est non vide.

⇨ Si E est totalement ordonné et A est une partie finie non vide de E, alors il admet un plus petit et un plus grand élément.

2.4.2 Relation d'équivalence

Définition 2.4.7

On dit qu'une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est une *relation d'équivalence* lorsqu'elle est
— réflexive : $\forall x \in E, \quad x\mathcal{R}x$.
— transitive : $\forall x, y, z \in E, \quad [x\mathcal{R}y \quad \text{et} \quad y\mathcal{R}z] \Longrightarrow x\mathcal{R}z$.
— symétrique : $\forall x, y \in E, \quad x\mathcal{R}y \Longrightarrow y\mathcal{R}x$.

Remarque

⇨ Si E est un ensemble quelconque, la relation d'égalité est une relation d'équivalence. Si $n \in \mathbb{N}$, la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{Z}$ par « $\forall a, b \in \mathbb{Z}, \quad a\mathcal{R}b \iff a \equiv b\ [n]$ » est une relation d'équivalence. De même, si f est une application de E dans F, la relation $\mathcal{R}$ définie sur E par « $\forall x, y \in E, \quad x\mathcal{R}y \iff f(x) = f(y)$ » est une relation d'équivalence.

Exercice 19

⇨ Soit E un ensemble. Montrer que la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathcal{P}(E)$ par

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E), \quad A\mathcal{R}B \iff \text{« Il existe une bijection de } A \text{ dans } B. \text{ »}$$

est une relation d'équivalence.

Définition 2.4.8

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E et $x \in E$. On appelle *classe d'équivalence de* x et on note $\text{Cl}(x)$ l'ensemble des éléments de E en relation avec x

$$\text{Cl}(x) := \{y \in E \mid x\mathcal{R}y\}.$$

On dit qu'une partie A de E est *une classe d'équivalence* lorsqu'il existe $x \in E$ tel que $A = \text{Cl}(x)$.

Proposition 2.4.1

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. Alors, la famille des classes d'équivalence est une partition de E.

Exercice 20

⇨ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre de classes d'équivalence sur $\mathbb{Z}$ pour la relation de congruence modulo n.

2.5 L'ensemble des entiers naturels

Dans ce cours, nous ne chercherons pas à construire l'ensemble des entiers naturels. Nous nous limiterons à la définition intuitive suivante.

$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Nous supposerons aussi définies les opérations usuelles $+$ et $\times$ ainsi que la relation d'ordre totale $\leqslant$. Nous admettrons enfin la proposition suivante.

Proposition 2.5.1

Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

Proposition 2.5.2

Toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.

2.5.1 Récurrence

Proposition 2.5.3: Principe de récurrence

Soit A une partie de $\mathbb{N}$ telle que
- $0 \in A$,
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \in A \Longrightarrow n+1 \in A$.

Alors $A = \mathbb{N}$.

Remarques

⇨ Cette proposition est au coeur du principe de récurrence. Si $\mathcal{H}$ est un prédicat sur $\mathbb{N}$ tel que
- $\mathcal{H}_0$ est vraie,
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}$,

alors $\mathcal{H}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il suffit pour démontrer cela d'appliquer la proposition précédente à

$$A := \{n \in \mathbb{N} \mid \mathcal{H}_n \text{ est vraie}\}.$$

⇨ Le principe de récurrence double est une conséquence du principe de récurrence. En effet, si $\mathcal{H}$ est un prédicat sur $\mathbb{N}$ tel que
- $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}_1$ sont vraies,
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad [\mathcal{H}_n \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_{n+1}] \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+2}$,

alors $\mathcal{H}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il suffit pour cela de remarquer que le prédicat $\mathcal{P}$ défini sur $\mathbb{N}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{P}_n := \text{« } \mathcal{H}_n \text{ et } \mathcal{H}_{n+1} \text{ sont vraies »}$$

vérifie le principe de récurrence.

⇨ De même, le principe de récurrence forte est une conséquence du principe de récurrence. En effet, si $\mathcal{H}$ est un prédicat sur $\mathbb{N}$ tel que
- $\mathcal{H}_0$ est vraie,
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad [\mathcal{H}_0 \quad \text{et} \quad \dots \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_n] \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}$,

alors $\mathcal{H}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il suffit pour cela de remarquer que le prédicat $\mathcal{P}$ défini sur $\mathbb{N}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{P}_n := \text{« } \mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_n \text{ sont vraies ».}$$

vérifie le principe de récurrence.

Exercices 21

⇨ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n + 2$ est un multiple de 3.

⇨ Soit (u_n) une suite telle que

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 1, \quad \text{et} \quad \left[\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{2}{n+2} u_n\right].$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant n^2$.

⇨ Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction surjective telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n) \geqslant n.$$

Montrer que $f = \mathrm{Id}$.

2.5.2 Définition par récurrence

Proposition 2.5.4

Soit E un ensemble, $f \in \mathcal{F}(E, E)$ et $x \in E$. Alors, il existe une unique suite (u_n) d'éléments de E telle que

$$u_0 = x \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

Définition 2.5.1

Soit E un ensemble, A une partie de E et $f \in \mathcal{F}(A, E)$. On dit qu'une partie B de A est *stable* par f lorsque

$$\forall x \in B, \quad f(x) \in B.$$

Remarques

⇨ Si B est stable par f, il est possible de considérer la restriction de f à B, corestreinte à B. On parle alors d'application *induite* à B.

⇨ Il arrive souvent que l'on ait un ensemble E, $f \in \mathcal{F}(A, E)$ où A est une partie de E, $x \in A$, et que l'on souhaite prouver l'existence d'une unique (u_n) telle que

$$u_0 = x \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

Si on trouve une partie B de A contenant x et stable par f, il suffit d'appliquer la proposition précédente à l'application f induite à B. Mais sans une telle partie B, il est impossible de prouver l'existence d'une telle suite. Supposons par exemple, qu'on se pose la question de l'existence d'une unique suite de réels (u_n) telle que

$$u_0 = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{3u_n - 2}{u_n - 1}.$$

Nous voyons rapidement qu'une telle suite n'existe pas. En effet, si c'était le cas, on aurait $u_1 = 1$ et $(3u_1 - 2)/(u_1 - 1)$ ne serait pas défini. On ne peut tout simplement pas appliquer la proposition précédente car la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{3x - 2}{x - 1} \end{array}$$

n'est pas définie sur $\mathbb{R}$ mais sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Exercice 22

⇨ Soit $x \in [2, +\infty[$. Montrer qu'il existe une unique suite (u_n) telle que

$$u_0 = x \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{3u_n - 2}{u_n - 1}.$$

Chapitre 3

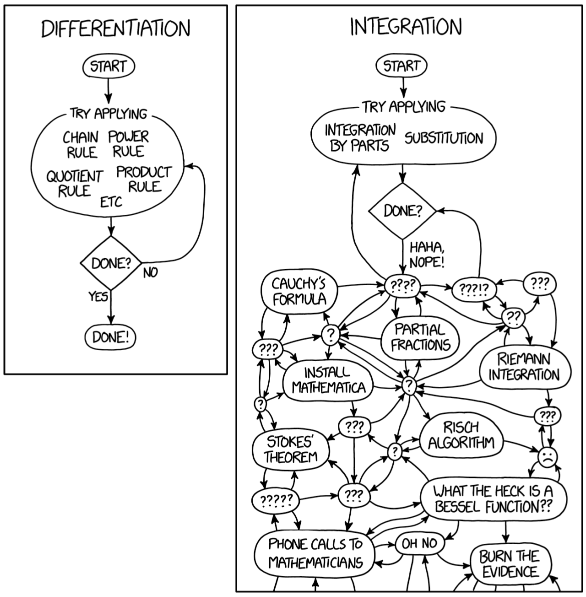
Compléments d'analyse

« Le calcul infinitésimal est l'apprentissage du maniement des inégalités bien plus que des égalités, et on pourrait le résumer en trois mots : majorer, minorer, approcher. »

— Jean Dieudonné (1906–1992)

« Les hommes sont comme les chiffres, ils n'acquièrent de valeur que par leur position. »

— Napoléon Bonaparte (1769–1821)



3.1 Le corps ordonné $\mathbb{R}$

3.1.1 La relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

Proposition 3.1.1

La relation d'ordre $\leqslant$ définie sur $\mathbb{R}$ possède les propriétés suivantes.

(i) Elle est totale.
$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad a \leqslant b \quad \text{ou} \quad b \leqslant a.$$

(ii) Elle est compatible avec l'addition.
$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \leqslant b \quad \Longrightarrow \quad a+c \leqslant b+c.$$

(iii) Elle est compatible avec la multiplication.
$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad [0 \leqslant a \quad \text{et} \quad 0 \leqslant b] \quad \Longrightarrow \quad 0 \leqslant ab.$$

Démonstration. On va considérer cette proposition comme un postulat pour démontrer d'autres propriétés classiques de $\mathbb{R}$.

Par exemple :

- L'antisymétrie de $\leqslant$ donne
$$a \leqslant 0 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant a \Longrightarrow a = 0$$
ce qui signifie que 0 est le seul réel à la fois positif et négatif.
- Montrons que
$$0 < a \text{ et } b < 0 \Longrightarrow ab < 0.$$
Déjà, si $b \leqslant 0$, alors d'après (ii) $b + (-b) \leqslant 0 + (-b)$, i.e. $0 \leqslant -b$. Ainsi, si $0 < a$ et $b < 0$ alors $0 \leqslant a$ et $b \leqslant 0$ (donc $0 \leqslant -b$ d'après ce qu'on vient de dire). D'après (iii), cela implique $0 \leqslant a(-b) = -ab$. Or, si $0 \leqslant c$, alors d'après (ii), $0 + (-c) \leqslant c + (-c)$, i.e. $-c \leqslant 0$. Ainsi, $-(-ab) \leqslant 0$, i.e. $ab \leqslant 0$. Mais $ab \neq 0$ donc $ab < 0$.

□

Remarques

⇨ Si $a, b \in \mathbb{R}$, la négation de « $a \leqslant b$ » est « $a > b$ ».

⇨ Deux réels a et b sont de même signe si et seulement si $ab \geqslant 0$. On dit qu'ils sont de même signe au sens strict lorsque $ab > 0$.

⇨ Quel que soit $a \in \mathbb{R}$, $a^2 \geqslant 0$.

Exercices 1

⇨ Soit a, b deux réels positifs. Montrer que
$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}.$$

⇨ Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$. Montrer que $a = b = c$.

Proposition 3.1.2

$$\begin{aligned}
\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}, \quad & [a \leqslant b \quad \text{et} \quad c \leqslant d] \implies a+c \leqslant b+d \\
\forall a,b,c \in \mathbb{R}, \quad & [a \leqslant b \quad \text{et} \quad 0 \leqslant c] \implies ac \leqslant bc \\
\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}, \quad & [0 \leqslant a \leqslant b \quad \text{et} \quad 0 \leqslant c \leqslant d] \implies 0 \leqslant ac \leqslant bd \\
\forall a,b \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad & 0 \leqslant a \leqslant b \implies 0 \leqslant a^n \leqslant b^n.
\end{aligned}$$

Démonstration. Soit $a,b,c,d \in \mathbb{R}$.

- Supposons $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$. En utilisant (ii) $a+c \leqslant b+c$ et $b+c \leqslant b+d$ donc par transitivité de $\leqslant$, $a+c \leqslant b+d$.
- Supposons $a \leqslant b$ et $0 \leqslant c$. Par (ii), en ajoutant $-a$ des deux côtés, $0 \leqslant b-a$ donc par (iii), $0 \leqslant c(b-a)$. Ainsi, par (ii) en ajoutant ac des deux côtés, $ac \leqslant bc$.
- Supposons $0 \leqslant a \leqslant b$ et $0 \leqslant c \leqslant d$. $0 \leqslant ac$ vient directement de (iii). De plus, par le point précédent, $ac \leqslant bc$ et $bc \leqslant bd$ et par transitivité de $\leqslant$, $ac \leqslant bd$
- On fait une récurrence en utilisant le point précédent.

□

Remarque

⇨ On peut multiplier une inégalité de signe quelconque par un réel négatif. Dans ce cas, l'inégalité change de sens.

Démonstration. Si $[a \leqslant b$ et $c \leqslant 0]$, alors par (ii) en ajoutant $-c$ des deux côtés, $[a \leqslant b$ et $0 \leqslant -c]$. Ainsi, d'après la deuxième propriété de la proposition précédente, $-ac \leqslant -bc$ d'où d'après (ii) en ajoutant $ac+bc$ des deux côtés, $bc \leqslant ac$. □

Exercice 2

⇨ L'assertion suivante est-elle vraie ?

$$\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}, \quad [a \leqslant b \quad \text{et} \quad 0 \leqslant c \leqslant d] \implies ac \leqslant bd$$

Proposition 3.1.3

Soit $a,b \in \mathbb{R}$. Alors

$$0 < a \leqslant b \implies 0 < \frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{a}.$$

Démonstration. Soit $a,b \in \mathbb{R}$. Supposons $0 < a \leqslant b$. Déjà, montrons que $0 \leqslant \frac{1}{a}$. Supposons le contraire, i.e. $\frac{1}{a} < 0$ alors $\frac{1}{a} \leqslant 0$ donc $a\frac{1}{a} \leqslant a \cdot 0$ d'après la deuxième propriété de la proposition précédente. Cela donne $1 \leqslant 0$, d'où la contradiction.

On a donc $a \leqslant b$ et $0 \leqslant 1/a$ ce qui donne en appliquant la deuxième propriété de la proposition précédente $1 \leqslant b/a$. Or $0 \leqslant 1/b$ (en appliquant ce qu'on vient de prouver pour $\frac{1}{a}$) donc, à nouveau à l'aide de la deuxième propriété de la proposition précédente, $1/b \leqslant 1/a$.

□

Proposition 3.1.4

$$\begin{aligned}
\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}, \quad & [a \leqslant b \quad \text{et} \quad c < d] \implies a+c < b+d \\
\forall a,b,c \in \mathbb{R}, \quad & [a < b \quad \text{et} \quad 0 < c] \implies ac < bc \\
\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}, \quad & [0 \leqslant a < b \quad \text{et} \quad 0 \leqslant c < d] \implies 0 \leqslant ac < bd \\
\forall a,b \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad & 0 \leqslant a < b \implies 0 \leqslant a^n < b^n.
\end{aligned}$$

Démonstration. Il faut prouver (ii) et (iii) de la proposition 1.1 avec des inégalités strictes. (iii) provient directement de l'intégrité de $\mathbb{R}$. Pour (ii), considérons $a,b,c \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. On veut montrer que $a+c < b+c$. Supposons le contraire, $b+c \leqslant a+c$ donc d'après (ii) $b+c-c \leqslant a+c-c$ donc $b \leqslant a$, ce qui est ABSURDE. On peut maintenant prouver la proposition comme on avait prouvé la proposition 1.2 avec les nouveaux (ii) et (iii). □

Que retenir ?

- ★ On peut toujours sommer des inégalités entre elles.
- ★ On peut multiplier des inégalités entre elles **si tout est positif**.

ATTENTION cependant à ce que les inégalités soient **dans le même sens**.

Définition 3.1.1

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leqslant b$. On définit

$$\begin{aligned} [a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}, &]a,b[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}, \\ ]a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}, & [a,b[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}, \\ [a,+\infty[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x\}, &]a,+\infty[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}, \\ ]-\infty,b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant b\}, &]-\infty,b[&= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}. \end{aligned}$$

3.1.2 Valeur absolue

Définition 3.1.2

Pour tout réel a, on définit sa *valeur absolue*, notée $|a|$ par

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geqslant 0 \\ -a & \text{si } a \leqslant 0. \end{cases}$$

Remarques

⇨ Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $a^2 = |a|^2$.

⇨ Si a et b sont deux réels, on définit la distance de a à b, notée $\mathrm{d}(a,b)$ par

$$\mathrm{d}(a,b) = |a-b|\,.$$

Exercice 3

⇨ Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Exprimer $\min(a,b)$ et $\max(a,b)$ à l'aide de a, b et de la valeur absolue.

Proposition 3.1.5

$$\begin{aligned} \forall a \in \mathbb{R}, &\quad |a| \geqslant 0 \\ \forall a \in \mathbb{R}, &\quad |a| = 0 \iff a = 0 \\ \forall a \in \mathbb{R}, &\quad |-a| = |a| \\ \forall a, b \in \mathbb{R}, &\quad |ab| = |a|\,|b|\,. \end{aligned}$$

Remarques

⇨ De cette proposition, on déduit les résultats suivants sur la distance entre deux réels.

$$\begin{aligned} \forall a, b \in \mathbb{R}, &\quad \mathrm{d}(a,b) \geqslant 0 \\ \forall a, b \in \mathbb{R}, &\quad \mathrm{d}(a,b) = 0 \iff a = b \\ \forall a, b \in \mathbb{R}, &\quad \mathrm{d}(b,a) = \mathrm{d}(a,b)\,. \end{aligned}$$

Exercice 4

⇨ Soit $a > 0$ et $x, y \geqslant a$. Montrer que

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{a}}\,|x-y|\,.$$

Proposition 3.1.6

Soit a un réel. Alors
$$|a| = \max\{a, -a\}.$$

Remarques

➯ En particulier, si M est un réel positif, pour montrer que $|a| \leqslant M$ il suffit de montrer que
$$a \leqslant M \quad \text{et} \quad -a \leqslant M.$$

➯ Soit a un réel et M un réel positif. Alors
$$|a| \leqslant M \quad \Longleftrightarrow \quad -M \leqslant a \leqslant M$$
$$|a| \geqslant M \quad \Longleftrightarrow \quad [a \leqslant -M \quad \text{ou} \quad a \geqslant M].$$

Exercice 5

➯ Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que $\cos(x)\sin(y) \geqslant -1$.

Proposition 3.1.7

Soit a et b deux réels. Alors
$$|a+b| \leqslant |a| + |b|.$$
De plus, l'égalité a lieu si et seulement si a et b sont de même signe.

Proposition 3.1.8

Soit a et b deux réels. Alors
$$||a| - |b|| \leqslant |a-b| \quad \text{et} \quad |a+b| \geqslant |a| - |b|.$$

Remarque

➯ Soit a, b, $c \in \mathbb{R}$. Alors
$$|\mathrm{d}(a,b) - \mathrm{d}(b,c)| \leqslant \mathrm{d}(a,c) \leqslant \mathrm{d}(a,b) + \mathrm{d}(b,c).$$

Exercice 6

➯ Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies ?

— $\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad |a-b| \leqslant |a| - |b|$.
— $\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad a^2 \leqslant b^2 \Longleftrightarrow |a| \leqslant |b|$.
— $\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad |a-b| \leqslant |a| + |b|$.
— $\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad a \leqslant b \Longrightarrow |a| \leqslant |b|$.
— $\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad |a-b| \geqslant |a| - |b|$.
— $\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad |a| \leqslant |b| + |b-a|$.

Proposition 3.1.9

Soit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Alors
$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$

Exercice 7

➯ Soit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ et $\theta_1, \dots, \theta_n \in \mathbb{R}$. Montrer que
$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k \sin(\theta_k)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$

3.1.3 Intervalle

Définition 3.1.3

On appelle *droite numérique achevée* et on note $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ auquel on adjoint deux éléments notés $-\infty$ et $+\infty$. On munit $\overline{\mathbb{R}}$ d'une relation d'ordre totale en prolongeant la relation d'ordre naturelle sur $\mathbb{R}$ et en posant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Remarque

⇨ On prolonge aussi de manière naturelle l'addition et la multiplication sans toutefois définir $(+\infty) - (+\infty)$ et $0 \times (\pm\infty)$.

Définition 3.1.4

On dit qu'une partie de $\mathbb{R}$ est un *intervalle* lorsqu'elle est de la forme

$$\varnothing, \qquad \mathbb{R}, \qquad [a, b]\,, \qquad]a, b[\,, \qquad [a, b[\,, \qquad]a, b]\,,$$

$$[a, +\infty[\,, \qquad]a, +\infty[\,, \qquad]-\infty, b]\,, \qquad]-\infty, b[$$

où $a, b \in \mathbb{R}$.

Remarques

⇨ En particulier, pour $a = b$, $[a, b] = \{a\}$ est un intervalle.

⇨ On dit qu'un intervalle est non trivial lorsqu'il contient au moins 2 points.

⇨ Si I est un intervalle non vide, il existe un unique couple $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ tel que $I = [a, b]$, $I =]a, b]$, $I = [a, b[$ ou $I =]a, b[$. On dit que a et b sont les *extrémités* de I. L'intervalle I est dit *ouvert* lorsqu'il ne contient pas ses extrémités c'est-à-dire lorsqu'il est vide, ou qu'il est de la forme $]a, b[$ où $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$.

⇨ L'intersection de deux intervalles est un intervalle. L'union de deux intervalles ayant au moins un point en commun est un intervalle.

⇨ Dans ce cours, une partie de $\mathbb{R}$ notée I ou J sera implicitement un intervalle.

3.1.4 Partie entière, approximation

Proposition 3.1.10

$\mathbb{R}$ possède la propriété

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists n \in \mathbb{N}, \quad n\varepsilon \geqslant x.$$

On dit que $\mathbb{R}$ est *archimédien.*

Remarque

⇨ En particulier, si on note x le volume d'eau de l'océan et ε le volume que peut contenir une petite cuillère, l'archimédisme de $\mathbb{R}$ nous permet de montrer qu'une personne (patiente) arrivera à vider l'océan à l'aide de cette petite cuillère.

Définition 3.1.5

Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$n \leqslant x < n + 1.$$

Cet entier est appelé *partie entière* de x et est noté $\lfloor x \rfloor$.

Remarques

⇨ Très souvent, plutôt que d'écrire seulement l'encadrement classique, on écrira même

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$$

où l'inégalité de gauche est obtenue grâce à l'inégalité de droite. Cela pourra donner un point de départ différent pour les exercices.

⇨ Si $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, $\lfloor a/b \rfloor$ est le quotient de la division euclidienne de a par b.

⇨ Soit $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$. Alors, il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $na \leqslant x < (n+1)a$.

⇨ On définit de même la partie entière supérieure de $x \in \mathbb{R}$, notée $\lceil x \rceil$, comme l'unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n-1 < x \leqslant n$. Si x est entier, alors $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil = x$. Sinon, $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$.

Exercices 8

⇨ Calculer $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

⇨ Montrer que la partie entière est une fonction croissante.

⇨ Soit $\alpha \in [0, 1[$. Montrer qu'il existe un unique $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\frac{n-1}{n} \leqslant \alpha < \frac{n}{n+1}.$$

Définition 3.1.6

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. On appelle valeur approchée de a à la précision ε tout réel b tel que $|a-b| \leqslant \varepsilon$. Si $b \leqslant a$ (respectivement $b \geqslant a$), on dit que b est une valeur approchée de a par défaut (respectivement, par excès).

Remarques

⇨ On note $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres irrationnels. $\mathbb{Q}$ est stable par les opérations usuelles : addition, soustraction, multiplication et division.

⇨ Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n}$ est soit un entier, soit un irrationnel. En particulier, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et $\sqrt{5}$ sont des irrationnels. On peut montrer que e et π sont irrationnels.

Définition 3.1.7

On dit qu'un réel a est *décimal* lorsqu'il existe $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que

$$a = m \cdot 10^{-n}.$$

Remarques

⇨ Un nombre décimal est rationnel. Cependant $1/3$ est rationnel, mais n'est pas décimal.

⇨ L'ensemble $\mathcal{D}$ des nombres décimaux est stable par les opérations d'addition, de soustraction, de multiplication mais pas par division.

Proposition 3.1.11

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors, $d = \lfloor 10^n a \rfloor \cdot 10^{-n} \in \mathcal{D}$ est une approximation par défaut de a à la précision 10^{-n}.

3.2 Fonction réelle d'une variable réelle

3.2.1 Définition

Définition 3.2.1

On appelle *fonction réelle* toute fonction définie sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Remarques

⇨ Il sera essentiel de ne pas confondre une fonction avec son expression. Par exemple parler de la fonction $\sin x$ est une erreur grave. On parlera plutôt de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui au réel x associe le réel $\sin x$ ou dans ce cas précis de la fonction sinus.

⇨ Par abus de langage, il est courant que les énoncés demandent à l'élève de donner le domaine de définition d'une fonction donnée par une expression (par exemple $\sqrt{x}$). Dans ce cas, il faut donner l'ensemble $\mathcal{D}$ des x pour lesquels cette expression à un sens (ici, $\mathbb{R}_+$). La fonction f sera alors la fonction de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$, qui à x associe cette expression en x.

Exercice 9

⇨ Déterminer le domaine de définition de la fonction d'expression

$$f(x) := \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right).$$

Définition 3.2.2

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathcal{D}$.

— Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on définit la fonction $\lambda f + \mu g$ par

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad (\lambda f + \mu g)(x) := \lambda f(x) + \mu g(x).$$

— On définit la fonction fg par

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad (fg)(x) := f(x)g(x).$$

— Si f ne s'annule en aucun point de $\mathcal{D}$, on définit $1/f$ par

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad \left(\frac{1}{f}\right)(x) := \frac{1}{f(x)}.$$

3.2.2 Symétries

Définition 3.2.3

Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}$ symétrique par rapport à 0, c'est-à-dire tel que

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad -x \in \mathcal{D}.$$

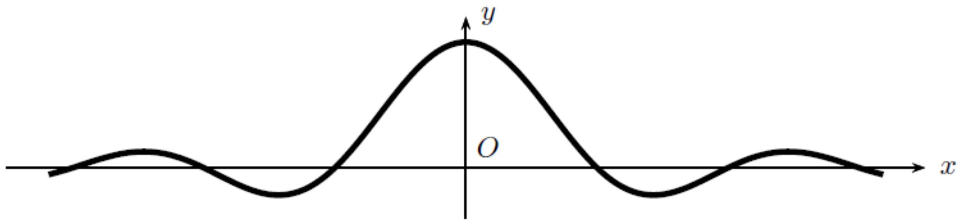
On dit que

— f est *paire* lorsque
$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad f(-x) = f(x).$$

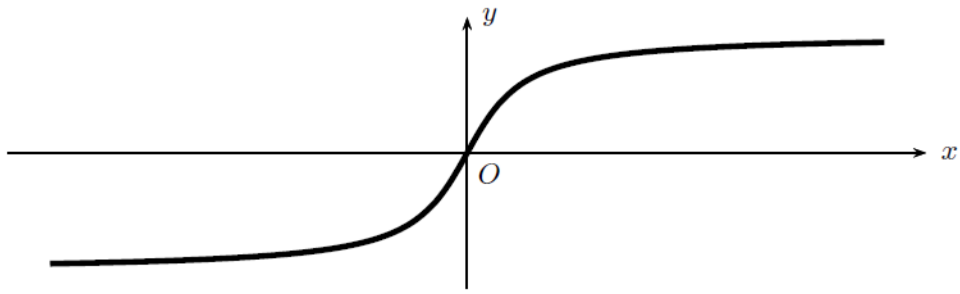
— f est *impaire* lorsque
$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad f(-x) = -f(x).$$

Remarques

⇨ Si f est paire, la droite (Oy) est un axe de symétrie du graphe de f.



⇨ Si f est impaire, O est un centre de symétrie du graphe de f.



⇨ Si f est paire ou impaire, pour étudier f, il suffit d'étudier sa restriction à $\mathcal{D} \cap \mathbb{R}_+$.

Exercice 10

⇨ Montrer que la fonction d'expression

$$\ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

est impaire.

Définition 3.2.4

Soit $T \in \mathbb{R}$ et f une fonction dont le domaine de définition vérifie

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad x + T \in \mathcal{D} \quad \text{et} \quad x - T \in \mathcal{D}$$

On dit que f est *T-périodique*, ou que T est une *période* de f, lorsque

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad f(x+T) = f(x).$$

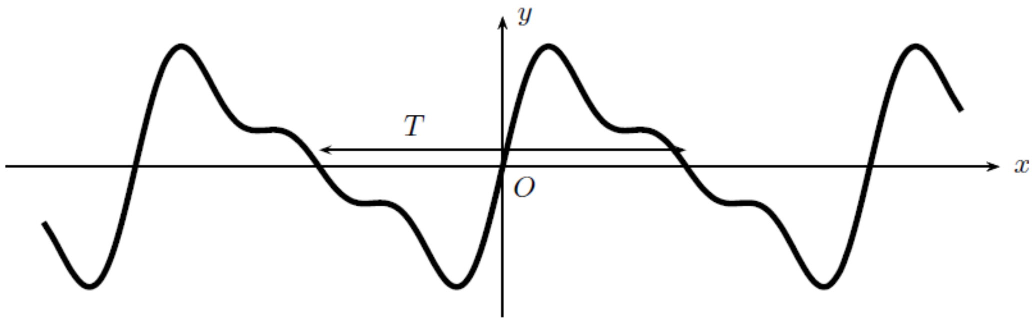
Lorsque f admet une période non nulle, on dit que f est *périodique*.

Remarques

⇨ Si f est T-périodique, alors

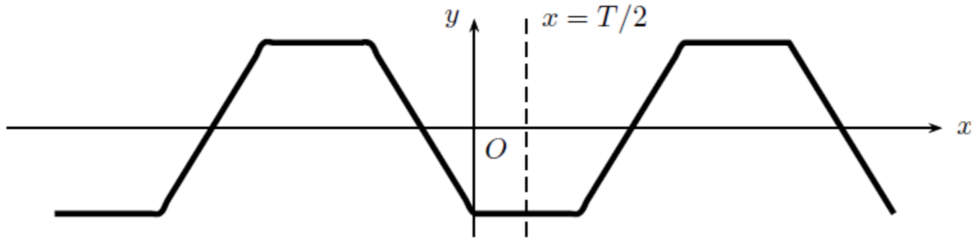
$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad f(x+kT) = f(x).$$

⇨ Si f est T-périodique, la translation de vecteur $T\overrightarrow{e_1}$ laisse stable le graphe de f.



Pour étudier f, il suffit d'étudier sa restriction à $\mathcal{D} \cap [a, a+T]$ pour un certain $a \in \mathbb{R}$.

⇨ S'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a-x) = f(x)$, la droite d'équation $x = a/2$ est un axe de symétrie du graphe de f.



Exercices 11

⇨ La fonction d'expression

$$f(x) := \sin(2x) + \cos\left(\frac{x}{3}\right)$$

est-elle périodique ?

⇨ Montrer que le graphe de la fonction d'expression

$$f(x) := \ln\left(x^2 + x + 1\right)$$

admet un axe de symétrie.

⇨ Tracer le graphe qu'une fonction quelconque f, puis celui des fonctions

$$x \mapsto f(x) + a, \qquad x \mapsto f(x+a), \qquad x \mapsto f(a-x), \qquad x \mapsto f(ax), \qquad x \mapsto af(x).$$

Proposition 3.2.1

Soit A et B deux parties de $\mathbb{R}$ et f une bijection de A dans B. Alors le graphe de f^{-1} est le symétrique du graphe de f par rapport à la première bissectrice des axes $[Ox)$ et $[Oy)$.

3.2.3 Monotonie

Définition 3.2.5

Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}$. On dit que

— f est *croissante* lorsque

$$\forall x, y \in \mathcal{D}, \quad x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y).$$

— f est *décroissante* lorsque

$$\forall x, y \in \mathcal{D}, \quad x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \geqslant f(y).$$

— f est *strictement croissante* lorsque

$$\forall x, y \in \mathcal{D}, \quad x < y \Longrightarrow f(x) < f(y).$$

— f est *strictement décroissante* lorsque

$$\forall x, y \in \mathcal{D}, \quad x < y \Longrightarrow f(x) > f(y).$$

Remarques

⇨ Les fonctions constantes sont les seules fonctions qui sont à la fois croissantes et décroissantes.

⇨ Une fonction peut n'être ni croissante, ni décroissante. C'est le cas de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$.

⇨ Si f est strictement monotone, elle est injective.

⇨ Si f est strictement croissante alors

$$\forall x, y \in \mathcal{D}, \quad f(x) < f(y) \Longleftrightarrow x < y.$$

De même

$$\forall x, y \in \mathcal{D}, \quad f(x) \leqslant f(y) \Longleftrightarrow x \leqslant y.$$

Attention, si f est seulement croissante et si $f(x) \leqslant f(y)$, on ne peut pas en conclure que $x \leqslant y$.

⇨ Si f est strictement croissante et $x_0 \in \mathcal{D}$ est un zéro de f, pour placer $x \in \mathcal{D}$ par rapport à x_0, il suffit de déterminer le signe de $f(x_0)$.

⇨ Les effets des opérations usuelles sur les propriétés de monotonie sont résumés dans les tableaux ci-dessous.

— *Combinaison linéaire positive*

f \ g	croissante	décroissante
croissante	croissante	×
décroissante	×	décroissante

— *Produit de fonctions positives*

f \ g	croissante	décroissante
croissante	croissante	×
décroissante	×	décroissante

— *Inverse d'une fonction strictement positive ou strictement négative*

f	croissante	décroissante
1/f	décroissante	croissante

— *Composition*

f \ g	croissante	décroissante
croissante	croissante	décroissante
décroissante	décroissante	croissante

Lorsque c'est possible, il est souvent bien plus judicieux de déterminer la monotonie d'une fonction à partir de ces règles plutôt qu'à partir de l'étude du signe de la dérivée. En effet, cette méthode est bien plus rapide et source de beaucoup moins d'erreurs.

Exercices 12

⇨ Montrer que la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$$

n'est ni croissante, ni décroissante.

⇨ Déterminer la monotonie des fonctions d'expressions

$$\frac{1}{\mathrm{e}^x + \sqrt{1+x}}, \qquad \sqrt{x+1} - \sqrt{x}.$$

3.2.4 Fonction majorée, minorée, bornée

Définition 3.2.6

On dit qu'une fonction réelle f est
- *majorée* lorsque
$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad f(x) \leqslant M.$$
- *minorée* lorsque
$$\exists m \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad f(x) \geqslant m.$$

Exercice 13

⇨ Montrer que la fonction d'expression $x\mathrm{e}^{-x}$ est majorée sur $\mathbb{R}$.

Définition 3.2.7

On dit qu'une fonction réelle ou complexe f est *bornée* lorsque

$$\exists M \in \mathbb{R}_+, \quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad |f(x)| \leqslant M.$$

Exercice 14

⇨ Montrer que la fonction d'expression $\frac{x}{1+x^2}$ est bornée par $1/2$ sur $\mathbb{R}$.

Proposition 3.2.2

Une fonction réelle est bornée si et seulement si elle est minorée et majorée.

Définition 3.2.8

Soit f et g deux fonctions de domaine $\mathcal{D}$. On dit que f est inférieure à g et on note $f \leqslant g$ lorsque

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad f(x) \leqslant g(x).$$

Remarques

⇨ La relation $\leqslant$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Elle n'est pas totale.

⇨ La négation de $f \leqslant g$ s'écrit

$$\exists x \in \mathcal{D}, \quad f(x) > g(x).$$

3.3 Fonction continue, fonction dérivable

3.3.1 Limite

Dans ce chapitre, on ne définira pas précisément la notion de limite. On se basera sur la définition intuitive suivante :

Définition 3.3.1

Étant donné une fonction f et $a, l \in \overline{\mathbb{R}}$, on dit que $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers a, lorsque, quitte à rendre x proche de a, on peut rendre $f(x)$ aussi proche que l'on souhaite de l. Dans ce cas, on note

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l.$$

Proposition 3.3.1

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et f, g deux fonctions telles que $f(x)$ et $g(x)$ tendent respectivement vers l_f et $l_g \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers a. Alors

— Si λ et μ sont deux réels
$$\lambda f(x) + \mu g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \lambda l_f + \mu l_g.$$
— On a
$$f(x)g(x) \xrightarrow[x \to a]{} l_f l_g.$$
— Si $l_f \neq 0$
$$\frac{1}{f(x)} \xrightarrow[x \to a]{} \frac{1}{l_f}.$$
— Plus généralement, si $l_g \neq 0$
$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to a]{} \frac{l_f}{l_g}.$$

Proposition 3.3.2

Soit f et g deux fonctions. On suppose que $f(x)$ tend vers $l_f \in \overline{\mathbb{R}}$ lorsque x tend vers $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et que g tend vers $l_g \in \overline{\mathbb{R}}$ lorsque x tend vers l_f. Alors $g(f(x))$ tend vers l_g lorsque x tend vers a.

Remarque

⇨ De nombreuses autres règles existent mélangeant limites finies et infinies. Elles sont résumées dans les tableaux ci-dessous où la présence d'une croix représente une forme indéterminée.

— *Somme*
Si f et g sont deux fonctions admettant respectivement pour limites l_f et $l_g \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $f+g$

l_f \ l_g	$-\infty$	$l_g \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\times$
$l_f \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$l_f + l_g$	$+\infty$
$+\infty$	$\times$	$+\infty$	$+\infty$

— *Opposé*
Si f est une fonction admettant pour limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $-f$

l	$-\infty$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$
	$+\infty$	$-l$	$-\infty$

— *Multiplication par un scalaire*
Si f est une fonction admettant pour limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors λf

λ \ l	$-\infty$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$\lambda < 0$	$+\infty$	λl	$-\infty$
$\lambda > 0$	$-\infty$	λl	$+\infty$

— *Produit*
Si f et g sont deux fonctions admettant respectivement pour limites l_f et $l_g \in \overline{\mathbb{R}}$, alors fg

l_f \ l_g	$-\infty$	$l_g < 0$	0	$l_g > 0$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$\times$	$-\infty$	$-\infty$
$l_f < 0$	$+\infty$	$l_f l_g$	0	$l_f l_g$	$-\infty$
$l_f = 0$	$\times$	0	0	0	$\times$
$l_f > 0$	$-\infty$	$l_f l_g$	0	$l_f l_g$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\times$	$+\infty$	$+\infty$

— *Inverse*
Si f est une fonction admettant pour limite l, alors $1/f$

l	$-\infty$	$l < 0$	0^-	0	0^+	$l > 0$	$+\infty$
	0	$1/l$	$-\infty$	$\times$	$+\infty$	$1/l$	0

— *Exponentiation*

Si f et g sont deux fonctions admettant respectivement pour limites l_f et l_g, alors f^g

l_f \ l_g	$-\infty$	$l_g < 0$	0	$l_g > 0$	$+\infty$
0	$+\infty$	$+\infty$	$\times$	0	0
$0 < l_f < 1$	$+\infty$	$l_f^{l_g}$	1	$l_f^{l_g}$	0
1	$\times$	1	1	1	$\times$
$1 < l_f$	0	$l_f^{l_g}$	1	$l_f^{l_g}$	$+\infty$
$+\infty$	0	0	$\times$	$+\infty$	$+\infty$

Exercice 15

⇨ Déterminer les limites en 0 de x^x et $x^{\frac{1}{\ln x}}$; en déduire que « 0^0 » est une forme indéterminée. De même, déterminer la limite en $+\infty$ de $(1+1/x)^x$; en déduire que « $1^{+\infty}$ » est une forme indéterminée.

3.3.2 Continuité

Définition 3.3.2

On dit qu'une fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ est *continue* en $x_0 \in \mathcal{D}$ lorsque

$$f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} f(x_0).$$

On dit que f est continue lorsque quel que soit $x_0 \in \mathcal{D}$, f est continue en x_0.

Proposition 3.3.3: Théorèmes usuels

Soit $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Alors

— Quels que soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est continue.

— La fonction fg est continue.

— Si g ne s'annule pas, f/g est continue.

Proposition 3.3.4: Théorèmes usuels

La composée de deux fonctions continues est continue.

Théorème 3.3.1: Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Si $y_0 \in$ « $[f(a), f(b)]$ », il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = y_0$.

Théorème 3.3.2: Théorème de la bijection

— Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (où $a, b \in \mathbb{R}$ et $a \leqslant b$) une fonction continue, strictement croissante. Alors elle réalise une bijection de $[a, b]$ sur
$$f([a, b]) = [f(a), f(b)].$$

— Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ (où $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ et $a < b$) une fonction continue, strictement croissante. On pose

$$l_a := \lim_{x \to a} f(x) \quad \text{et} \quad l_b := \lim_{x \to b} f(x).$$

Alors f réalise une bijection de $]a, b[$ sur

$$f\left(]a, b[\right) = \left]l_a, l_b\right[.$$

Proposition 3.3.5

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone. Elle réalise donc une bijection de I sur $J := f(I)$. Alors

— f^{-1} est strictement monotone, de même sens de variation que f.

— f^{-1} est continue.

3.3.3 Dérivabilité

Définition 3.3.3

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathcal{D}$. On dit que f est *dérivable* en x_0 lorsque

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

admet une limite finie lorsque h tend vers 0. Dans ce cas, on note $f'(x_0)$ cette limite que l'on appelle *nombre dérivé* de f en x_0. On dit que f est dérivable lorsqu'elle est dérivable en tout point de $\mathcal{D}$.

Remarques

- Il est équivalent de dire que f est dérivable en x_0 lorsque $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie lorsque x tend vers x_0. Cette limite est $f'(x_0)$.
- Si f est dérivable en x_0, la droite d'équation $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ est tangente au graphe de f en x_0.
- Lorsque
$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} \pm\infty,$$
le graphe de f admet une tangente verticale en x_0. Dans ce cas, f n'est pas dérivable en x_0.
- On dit qu'une fonction f est dérivable à gauche en x_0 lorsque l'expression
$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$
admet une limite finie lorsque h tend vers 0 par la gauche ; si tel est le cas, cette limite est notée $f'_g(x_0)$. On définit de même la notion de dérivabilité à droite. Une fonction est dérivable en x_0 si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite en x_0 et que $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.
- Si f et g sont des fonctions telles qu'en x_0, $f(x_0) = g(x_0)$, on ne peut rien en conclure sur $f'(x_0)$ et $g'(x_0)$. En particulier, il est absurde de dire que parce que $f(x_0) = 0$, on peut en déduire que $f'(x_0) = 0$. On dira qu'on peut dériver des identités, mais pas des égalités.

Proposition 3.3.6

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathcal{D}$. Si f est dérivable en x_0, alors elle est continue en x_0.

Remarque

- La réciproque de cette proposition est fausse comme le montre l'exemple de la fonction $x \mapsto |x|$ qui est continue en 0 mais qui n'est pas dérivable en 0.

Exercice 16

- Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et $b \in \mathbb{R}$ pour que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} ax+b & \text{si } x < 0 \\ e^x & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$
soit dérivable en 0.

Définition 3.3.4

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction. On note $\mathcal{D}'$ l'ensemble des $x_0 \in \mathcal{D}$ en lesquels f est dérivable. On définit la *fonction dérivée* de f, notée f' par

$$f' : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}' & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x). \end{array}$$

Remarque

- Les fonctions usuelles sont dérivables en tout point de leur ensemble de définition, excepté la fonction $x \mapsto |x|$

qui n'est pas dérivable en 0 et les fonctions $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ qui ne sont pas dérivables en 0 pour $n \geqslant 2$.

$\mathcal{D}$	$f(x)$	$\mathcal{D}_{f'}$	$f'(x)$
$\mathbb{R}$	$x^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R}$	$\begin{cases} nx^{n-1} & \text{si } n \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{cases}$
$\mathbb{R}^*$	$x^n \quad (n \in \mathbb{Z})$	$\mathbb{R}^*$	nx^{n-1}
$\mathbb{R}_+^*$	$x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}_+^*$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\mathbb{R}_+$	$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$
$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$	e^x
$\mathbb{R}_+^*$	$\ln x$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{x}$
$\mathbb{R}^*$	$\ln \lvert x \rvert$	$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x}$
$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$
$\mathbb{R}$	$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$
$\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$	$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$	$\operatorname{cotan} x$	$\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$	$-\left(1 + \operatorname{cotan}^2 x\right) = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Proposition 3.3.7: Théorèmes usuels

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. Alors

— Quels que soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est dérivable et

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad (\lambda f + \mu g)'(x) = \lambda f'(x) + \mu g'(x)$$

— La fonction fg est dérivable et

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad (fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

— Si f ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$, $1/f$ est dérivable et

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad \left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}.$$

— Plus généralement, si g ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$, f/g est dérivable et

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Proposition 3.3.8: Théorèmes usuels

Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{D}_g \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(\mathcal{D}_f) \subset \mathcal{D}_g$. Si f et g sont dérivables, alors $g \circ f$ est dérivable et

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad (g \circ f)'(x) = f'(x)g'(f(x)).$$

Remarque

⇨ En particulier, si $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable et $n \in \mathbb{N}$, la fonction g définie sur $\mathcal{D}$ par

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad g(x) := f(x)^n$$

est dérivable et

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad g'(x) = nf'(x)f(x)^{n-1}.$$

⇨ Si $f(x) := a(x)/b(x)^\alpha$, il est bon d'écrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = a(x)b(x)^{-\alpha}$ avant de dériver f.

⇨ Attention, ce n'est pas parce que les théorèmes usuels ne peuvent pas s'appliquer en un point qu'on peut en conclure que la fonction n'y est pas dérivable.

Exercices 17

⇨ Montrer que la dérivée d'une fonction paire (resp. impaire, T-périodique) est impaire (resp. paire, T-périodique).

⇨ Étudier la dérivabilité et calculer les dérivées des fonctions d'expression

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}, \qquad \left(x^3+2x+1\right) \mathrm{e}^{x^2}, \qquad \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

⇨ Étudier la dérivabilité et calculer la dérivée de la fonction définie sur $[0, \pi/2]$ par

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad f(x) \coloneqq \sqrt{1-\cos x}.$$

Proposition 3.3.9

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I, dérivable et strictement monotone. Elle réalise donc une bijection de I sur $J \coloneqq f(I)$. On pose

$$A \coloneqq \{x \in I \mid f'(x) = 0\}.$$

Alors f^{-1} est dérivable en tout point de $J \setminus f(A)$ et

$$\forall y \in J \setminus f(A), \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

3.3.4 Dérivées successives

Définition 3.3.5

Si $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ est une fonction, on définit par récurrence la *dérivée n-ième* de f (lorsqu'elle existe) de la manière suivante

— On pose $f^{(0)} \coloneqq f$.
— Si $n \in \mathbb{N}$, on définit $f^{(n+1)}$ comme étant la dérivée, lorsqu'elle existe, de $f^{(n)}$.

Si $x_0 \in \mathcal{D}$, on dit que f est dérivable n fois en x_0 lorsque $f^{(n)}$ est définie en x_0. On dit que f est dérivable n fois lorsqu'elle est dérivable n fois en tout point de son domaine de définition.

Proposition 3.3.10

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables n fois.

— Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda f + \mu g$ est dérivable n fois et

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad (\lambda f + \mu g)^{(n)}(x) = \lambda f^{(n)}(x) + \mu g^{(n)}(x).$$

— fg est dérivable n fois.
— Si g ne s'annule pas, alors f/g est dérivable n fois.

Proposition 3.3.11

Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{D}_g \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions telles que $f(\mathcal{D}_f) \subset \mathcal{D}_g$. Si f et g sont dérivables n fois, alors $g \circ f$ est dérivable n fois.

Définition 3.3.6

On dit qu'une fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ lorsqu'elle est dérivable et que sa dérivée est continue.

Proposition 3.3.12

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

— Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
— fg est de classe $\mathcal{C}^1$.
— Si g ne s'annule pas, alors f/g est de classe $\mathcal{C}^1$.

Proposition 3.3.13

La composée de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

3.3.5 Dérivation et monotonie

Proposition 3.3.14

Soit f une fonction réelle, dérivable sur un intervalle I. Alors

— f est croissante si et seulement si
$$\forall x \in I, \quad f'(x) \geqslant 0.$$

— f est décroissante si et seulement si
$$\forall x \in I, \quad f'(x) \leqslant 0.$$

Remarque

⇨ Cette proposition est fausse lorsque le domaine de définition de f n'est pas un intervalle. Par exemple la fonction
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1/x \end{array}$$
n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$ bien qu'elle soit dérivable et que sa dérivée soit négative. Cependant ses restrictions aux intervalles $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$ sont toutes les deux décroissantes.

Exercice 18

⇨ Montrer que
$$\forall x \in [0,1], \quad x \leqslant \left(1 + \frac{x}{2}\right) \ln(1+x).$$

Proposition 3.3.15

Soit f une fonction réelle, dérivable sur un intervalle I. Alors f est constante si et seulement si
$$\forall x \in I, \quad f'(x) = 0.$$

Remarque

⇨ Cette proposition est fausse lorsque le domaine de f n'est pas un intervalle.

Proposition 3.3.16

Soit f une fonction réelle, dérivable sur un intervalle I. Si

— $\forall x \in I, \quad f'(x) \geqslant 0$

— Le nombre de points de I où f' s'annule est fini.

alors f est strictement croissante.

Remarques

⇨ La fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ bien qu'elle soit dérivable et que sa dérivée s'annule en 0.

⇨ Une fonction croissante qui n'est pas strictement croissante est constante sur un intervalle non trivial. Ces fonctions sont donc rares. Cependant, il est toujours plus délicat de montrer qu'une fonction est strictement croissante que croissante. Lorsqu'on a besoin de la stricte monotonie, il convient donc d'être particulièrement attentif. Inversement, il est inutile de prouver la stricte monotonie si seule la monotonie nous est utile.

Exercice 19

⇨ Combien de racines réelles possède le polynôme $P := X^3 - 3X - 1$?

3.3.6 Dérivation des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

Définition 3.3.7

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ et $x_0 \in \mathcal{D}$. On dit que f est dérivable en x_0 lorsque $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ le sont. Si c'est le cas, on définit le nombre dérivé de f en x_0 par

$$f'(x_0) := \operatorname{Re}(f)'(x_0) + \mathrm{i}\operatorname{Im}(f)'(x_0).$$

On dit que f est dérivable lorsque f est dérivable en tout point de $\mathcal{D}$.

Proposition 3.3.17: Théorèmes usuels

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ et $g : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ deux fonctions dérivables. Alors
- Quels que soient $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est dérivable et
$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad (\lambda f + \mu g)'(x) = \lambda f'(x) + \mu g'(x).$$
- La fonction fg est dérivable et
$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad (fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$
- Si f ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$, $1/f$ est dérivable et
$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad \left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}.$$
- Plus généralement, si g ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$, f/g est dérivable et
$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Proposition 3.3.18

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable. Alors la fonction g définie par

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad g(x) := \mathrm{e}^{f(x)}$$

est dérivable et

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad g'(x) = f'(x)\mathrm{e}^{f(x)}.$$

Proposition 3.3.19

Soit f une fonction complexe, dérivable sur un intervalle I. Alors f est constante si et seulement si

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = 0.$$

Remarque

⇨ On dit qu'une fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ lorsque ses parties réelles et imaginaires le sont. Comme pour les fonctions à valeurs réelles, on montre qu'une combinaison linéaire, un produit, un quotient ainsi que l'exponentielle de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sont de classe $\mathcal{C}^1$.

3.4 Intégration, primitive

Dans la suite de ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

3.4.1 Primitive

Définition 3.4.1

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$. On appelle *primitive* de f toute fonction dérivable $F : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ telle que

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad F'(x) = f(x).$$

Proposition 3.4.1

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction admettant une primitive F sur un intervalle I. Alors les primitives de f sont les fonctions $F_C : I \to \mathbb{K}$ définies sur I par

$$\forall x \in I, \quad F_C(x) \coloneqq F(x) + C$$

où $C \in \mathbb{K}$.

Remarque

⇨ Si la fonction d'expression $F(x)$ est une primitive de la fonction d'expression $f(x)$, on écrira

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x).$$

Il faudra rester vigilant avec cette notation. Par exemple

$$\int 1\,\mathrm{d}x = x \quad \text{et} \quad \int 1\,\mathrm{d}x = x + 1$$

mais $x \neq x + 1$. On ne l'utilisera donc que pour calculer des primitives et on s'abstiendra de toute lecture autre que de la gauche vers la droite. On s'abstiendra aussi de l'utiliser avec des inégalités.

3.4.2 Intégration et régularité

Proposition 3.4.2

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur un intervalle I et $x_0 \in I$. On définit sur I la fonction F par

$$\forall x \in I, \quad F(x) \coloneqq \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Alors F est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x).$$

En particulier, F est une primitive de f.

Proposition 3.4.3

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur un intervalle I. Alors f admet une primitive. Plus précisément, pour tout $x_0 \in I$, il existe une unique primitive F de f s'annulant en x_0. De plus

$$\forall x \in I, \quad F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Théorème 3.4.1: Théorème fondamental de l'analyse

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur un intervalle I et $a, b \in I$. Alors, si F est une primitive de f

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

3.4.3 Intégration et inégalité

Proposition 3.4.4

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles continues et $a, b \in I$. On suppose que

$$a \leqslant b \quad \text{et} \quad [\forall x \in [a,b], \quad f(x) \leqslant g(x)].$$

Alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

3.4.4 Intégration par parties, changement de variable

Proposition 3.4.5: Intégration par parties

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $g : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur un intervalle I. Soit G une primitive de g. Alors, si $a, b \in I$

$$\int_a^b \underbrace{f(x)}_{\text{dérive}} \overbrace{g(x)}^{\text{intègre}} \,\mathrm{d}x = [f(x)G(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 20

⇨ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit I_n par

$$I_n := \int_0^1 t^n \sqrt{1-t}\,\mathrm{d}t$$

Calculer I_0 et trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.

Remarque

⇨ Si f est dérivable et que G est une primitive de g, alors

$$\int \underbrace{f(x)}_{\text{dérive}} \overbrace{g(x)}^{\text{intègre}} \,\mathrm{d}x = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)\,\mathrm{d}x.$$

Proposition 3.4.6: Changement de variables

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur un intervalle I. Soit J un intervalle, $\bar{x} : J \to I$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $a_x, b_x \in I$ et $a_t, b_t \in J$ tels que

$$a_x = \bar{x}(a_t) \quad \text{et} \quad b_x = \bar{x}(b_t).$$

Alors

$$\int_{a_t}^{b_t} f(\bar{x}(t)) \frac{d\bar{x}}{dt}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{a_x}^{b_x} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 21

⇨ Calculer $\displaystyle\int_0^\pi \ln\left(1+\cos^2 x\right) \sin(2x)\,\mathrm{d}x$.

3.4.5 Calcul de primitive

Étant donnée une fonction f définie sur un intervalle à partir d'une expression en les fonctions usuelles, on cherche une primitive F de f. Puisque f est une expression en les fonctions usuelles, elle est en particulier continue, donc admet une primitive. Le problème du calcul de primitive est d'expliciter une telle fonction.

Il est d'abord essentiel de connaître par coeur les primitives des fonctions usuelles.

$\mathcal{D}$	$f(x)$	$F(x)$
$\mathbb{R}$	$x^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\mathbb{R}^*$	$x^n \quad (n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\})$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
$\mathbb{R}$	e^x	e^x
$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\sin x$
$\mathbb{R}$	$\sin x$	$-\cos x$

Ensuite, il existe de nombreuses techniques à connaître pour calculer certaines primitives.

— **Polynômes**
Le calcul d'une primitive d'une fonction polynôme se fait de manière immédiate

$$\int a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \,\mathrm{d}x = a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}.$$

— **Polynômes-exponentielle**
Le calcul d'une primitive d'une fonction polynôme-exponentielle, c'est-à-dire de

$$\int \left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n\right) \mathrm{e}^{cx} \,\mathrm{d}x$$

se fait facilement par récurrence en effectuant une intégration par parties

$$\int \underbrace{\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n\right)}_{\text{dérive}} \overbrace{\mathrm{e}^{cx}}^{\text{intègre}} \,\mathrm{d}x.$$

De cette manière, on abaisse le degré du polynôme. Il suffit de réitérer le procédé jusqu'à faire disparaitre le terme polynomial.

Exercice 22
⇨ Calculer $\displaystyle\int (2x+3)\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$.

— **Polynômes-sinus/cosinus**
On calcule de même toute primitive du produit d'une fonction polynôme et d'une fonction sinus ou cosinus.

Exercice 23
⇨ Calculer $\displaystyle\int x\cos x \,\mathrm{d}x$.

— **Exponentielle-sinus/cosinus** Pour calculer des primitives de la forme

$$\int \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}x \quad \text{ou} \quad \int \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)\,\mathrm{d}x,$$

on passe par l'exponentielle complexe. On fait de même si un polynôme est en facteur d'une telle expression.

Exercice 24
⇨ Calculer $\displaystyle\int \mathrm{e}^{2x}\sin(3x)\,\mathrm{d}x$.

— **Polynôme-logarithme**
Le calcul d'une primitive d'une fonction polynôme-logarithme, c'est-à-dire de

$$\int \left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n\right) \ln x \,\mathrm{d}x$$

se fait facilement par intégration par parties

$$\int \overbrace{\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n\right)}^{\text{intègre}} \underbrace{\ln x}_{\text{dérive}} \,\mathrm{d}x.$$

Exercice 25

⇨ Calculer $\displaystyle\int \ln x \, \mathrm{d}x$.

— **Polynômes en** sin **et** cos

Pour le calcul de primitives de polynômes en sin et cos, c'est-à-dire de :

$$\int \sin^n x \cos^m x \, \mathrm{d}x \quad \text{où } n, m \in \mathbb{N}$$

on peut, lorsque n ou m est impair effectuer un changement de variable pour se ramener à un calcul de primitive de polynôme.

— Si m est impair, soit $m' \in \mathbb{N}$ tel que $m = 2m' + 1$. On effectue alors le changement de variable $t = \sin x$.

$$\begin{aligned}\int \sin^n x \cos^m x \, \mathrm{d}x &= \int \sin^n x \cos^{2m'+1} x \, \mathrm{d}x \\ &= \int \sin^n x \left(1 - \sin^2 x\right)^{m'} \cos x \, \mathrm{d}x \\ &= \int t^n \left(1 - t^2\right)^{m'} \, \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

— Si n est impair, on effectue le changement de variable $t = \cos x$.

— Si n et m sont pairs, on effectue une linéarisation de l'expression.

Exercice 26

⇨ Calculer

$$\int \sin^2 x \cos^3 x \, \mathrm{d}x, \qquad \int \cos^2 x \sin^5 x \, \mathrm{d}x, \qquad \int \cos^2 x \sin^2 x \, \mathrm{d}x.$$

Chapitre 4

Complements d'algèbre

« The closer one looks, the more subtle and remarkable Gaussian elimination appears. »

— NICK TREFETHEN (1955–)

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

4.1 Polynôme

4.1.1 Définition, degré et coefficients

Définition 4.1.1

On appelle *polynôme* à coefficients dans $\mathbb{K}$ toute expression de la forme

$$P \coloneqq a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1} X^{n-1} + a_n X^n$$

où $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$. L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}[X]$.

Remarques

⇨ Dans cette expression, X est appelée l'*indéterminée* et sa vocation est d'être *substituée* par un élément x de $\mathbb{K}$. Cette substitution se note $X \to x$ et le résultat ainsi obtenu est noté $P(x)$. Par exemple, si $P \coloneqq X^2 + X + 1$, alors $P(2) = 2^2 + 2 + 1 = 7$.

⇨ Nous reviendrons au cours de l'année sur les polynômes. Pour le moment, l'essentiel est de savoir calculer dans $\mathbb{K}[X]$. On se basera sur les deux points suivants que nous considérerons comme axiome.
— Si $P \in \mathbb{K}[X]$, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ tels que $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1} X^{n-1} + a_n X^n$.
— Si $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ sont tels que $a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1} X^{n-1} + a_n X^n = 0$, alors $a_0 = \cdots = a_n = 0$.

Définition 4.1.2

Si $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme non nul, il existe un unique $n \in \mathbb{N}$ et un unique $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que

$$P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + a_n X^n \qquad \text{et} \qquad a_n \neq 0.$$

L'entier n s'appelle le *degré* de P et est noté $\deg P$. Les éléments $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ sont ses *coefficients*. Par convention, on dit que le degré du polynôme nul est $-\infty$.

Définition 4.1.3

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à n.

Remarque

⇨ Si $n \in \mathbb{N}$, un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est de degré inférieur ou égal à n si et seulement si il existe $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tels que $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$.

Proposition 4.1.1

Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$.

— Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Si $\deg P \leqslant n$ et $\deg Q \leqslant n$, alors

$$\deg(\lambda P + \mu Q) \leqslant n.$$

— Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $\mu \in \mathbb{K}$. Si $\deg P = n$ et $\deg Q < n$, alors

$$\deg(\lambda P + \mu Q) = n.$$

— On a $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$.

Remarque

⇨ Attention, une combinaison linéaire de polynômes de degré n peut être de degré strictement inférieur à n. Par exemple, si $P := X^2 + 1$ et $Q := -X^2 + 1$, $\deg(P + Q) = \deg(2) = 0 \neq 2$.

Définition 4.1.4

Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0$. Alors, il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que

$$A = QB + R \quad \text{et} \quad \deg R < \deg B.$$

Q est appelé *quotient* de la division euclidienne de A par B, R son *reste*.

4.1.2 Racines

Définition 4.1.5

Si $P \in \mathbb{K}[X]$, on appelle *racine* de P tout élément $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $P(\alpha) = 0$.

Remarques

⇨ Le calcul des racines des polynômes de degré 2 se fait en utilisant le discriminant.

⇨ Il n'y a pas de méthode systématique pour trouver les racines des polynômes de degré supérieur. En effet, on peut montrer qu'il n'existe pas de formule générale permettant de calculer les racines des polynômes de degré 3 ou plus avec des radicaux réels. Et même si on s'autorise les racines n-ièmes de nombres complexes, il n'existe pas de formule générale permettant de déterminer les racines de polynômes de degré 5 ou plus. Cependant, il existe différentes techniques qui sont efficaces pour certains polynômes.

Proposition 4.1.2

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors α est une racine de P si et seulement si il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X - \alpha)Q$.

Remarques

- La factorisation effective se fait en effectuant une division euclidienne. Par exemple, si $P := X^3+3X^2+3X+2$, on remarque que $P(-2) = 0$ donc P se factorise par $X+2$ et la division euclidienne s'effectue de la manière suivante.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
X^3 & +3X^2 & +3X & +2 & X+2 \\
\cline{5-5}
X^3 & +2X^2 & & & X^2+X+1 \\
\cline{1-4}
 & X^2 & +3X & +2 & \\
 & X^2 & +2X & & \\
\cline{2-4}
 & & X & +2 & \\
 & & X & +2 & \\
\cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

donc $X^3+3X^2+3X+2 = (X+2)(X^2+X+1)$. Puisque les racines de X^2+X+1 dans $\mathbb{C}$ sont j et j^2, on en déduit que les racines de P sont $-2, \mathrm{j}$ et j^2.

- Si P est un polynôme à coefficients entiers, il existe une technique efficace pour déterminer rapidement ses racines rationnelles. Soit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ tels que $a_n \neq 0$ et $P = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$. Si x est une racine rationnelle de P, il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux tels que $x = p/q$. Puisque $P(x) = 0$, on en déduit que

$$a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + \cdots + a_1 \cdot \frac{p}{q} + a_0 = 0.$$

En multipliant par q^n, on obtient

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0.$$

On en déduit que

$$a_n p^n = -q \left(a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1}\right)$$

et donc que q divise $a_n p^n$. Or q et p sont premiers entre eux donc q et p^n sont premiers entre eux. D'après le lemme de Gauss, on en déduit que q divise a_n. De même, on montre que p divise a_0. Comme il existe un nombre fini de diviseurs d'un entier, les racines rationnelles sont donc à chercher parmi un nombre fini d'éléments. Par exemple, si $P := 3X^3 + 5X^2 + 5X + 2$, et si p/q est une racine rationnelle irréductible de P, alors p divise 2 et q divise 3. Donc $p \in \{-2, -1, 1, 2\}$ et $q \in \{1, 3\}$. Les racines rationnelles de P sont donc parmi $\{-2, -1, 1, 2, -2/3, -1/3, 1/3, 2/3\}$. Si on teste tous ces rationnels, on se rend compte que seul $-2/3$ est une racine de P. P se factorise donc par $3X+2$ et une division euclidienne nous donne $P = (3X+2)(X^2+X+1)$. Les racines de P sont donc $-2/3, \mathrm{j}$ et j^2.

- D'autres techniques permettent de trouver les racines d'un polynôme de degré $n \geqslant 3$. Par exemple, pour certains polynômes, ramener la recherche de leurs racines à la recherche des racines n-ièmes d'un nombre complexe.

Proposition 4.1.3

Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}$ admet au plus n racines.

Remarques

- En conséquence, un polynôme de degré inférieur ou égal à n admettant au moins $n+1$ racines est nul.
- Un polynôme admettant une infinité de racines est donc nul.

4.2 Somme et produit

4.2.1 Somme

Définition 4.2.1

Soit $m, n \in \mathbb{Z}$ tels que $m \leqslant n$ et $u_m, u_{m+1}, \ldots, u_{n-1}, u_n \in \mathbb{C}$. On définit

$$\sum_{k=m}^{n} u_k := u_m + u_{m+1} + \cdots + u_{n-1} + u_n.$$

Remarque

➯ Lorsque $n = m - 1$, la convention est de poser $\sum_{k=m}^{n} u_k := 0$. Cette convention permet d'écrire

$$\forall n \geqslant m, \quad \sum_{k=m}^{n} u_k = u_n + \sum_{k=m}^{n-1} u_k.$$

➯ Si $m, n \in \mathbb{Z}$ sont tels que $n \geqslant m - 1$, alors $\text{Card}(\llbracket m, n \rrbracket) = n - m + 1$. En particulier, quel que soit $a \in \mathbb{C}$

$$\sum_{k=m}^{n} a = (n - m + 1)\, a.$$

Exercice 1

➯ Écrire avec le symbole $\sum$ les sommes suivantes, sachant que chacune d'elle est composée de $n+1$ termes.

$$-a_0 + a_1 - a_2 + a_3 + \cdots, \qquad a_1 + a_4 + a_7 + \cdots$$

$$a_0 + 2a_1 + 3a_2 + 4a_3 + \cdots, \qquad a_0 - 2a_1 + 4a_2 - 8a_3 + \cdots.$$

Proposition 4.2.1

Soit $m, n \in \mathbb{Z}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ et $(u_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (v_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ deux suites d'éléments de $\mathbb{C}$. Alors

$$\sum_{k=m}^{n} (\lambda u_k + \mu v_k) = \lambda \sum_{k=m}^{n} u_k + \mu \sum_{k=m}^{n} v_k.$$

Proposition 4.2.2

— Soit $m, n \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{Z}$. Alors

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{k=m-p}^{n-p} u_{k+p}.$$

— Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k}.$$

Remarque

➯ En pratique, lorsque l'on souhaite faire la première transformation, on dit qu'on effectue le changement de variable $k \to k + p$.

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \text{«} \sum_{k=m}^{k=n} u_k = \sum_{k+p=m}^{k+p=n} u_{k+p} = \sum_{k=m-p}^{k=n-p} u_{k+p} \text{»} = \sum_{k=m-p}^{n-p} u_{k+p}.$$

Le seconde transformation se fait de manière similaire, en utilisant cette fois la convention que si les bornes de sont pas « dans le bon sens », on les échange ; on dit dans ce cas qu'on fait le changement de variable $k \to n - k$.

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \text{«} \sum_{k=0}^{k=n} u_k = \sum_{n-k=0}^{n-k=n} u_{n-k} = \sum_{k=n}^{k=0} u_{n-k} = \sum_{k=0}^{k=n} u_{n-k} \text{»} = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

➯ Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ une suite. Si $m, n \in \mathbb{Z}$ sont tels que $n \geqslant m - 1$

$$\sum_{k=m}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_m.$$

On dit qu'une telle somme est *télescopique*.

Exercices 2

➯ Calculer explicitement la suite (u_n) définie par

$$u_0 := 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} := u_n + 2n + 3.$$

⇨ En effectuant le changement de variable $k \to k+1$, calculer
$$\sum_{k=0}^{n} k2^k.$$

⇨ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer
$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k}\right).$$

Définition 4.2.2

Soir $r \in \mathbb{C}$. Une suite (u_n) est dite *arithmétique de raison* r lorsque
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r.$$
On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$.

Proposition 4.2.3

Soit (u_n) une suite arithmétique et $m, n \in \mathbb{Z}$ tels que $n \geqslant m-1$. Alors
$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n} u_k &= \frac{u_m + u_n}{2} \cdot (n-m+1)\\ &= \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2} \cdot (\text{nombre de termes}).\end{aligned}$$

Proposition 4.2.4

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors
$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Définition 4.2.3

Soit $q \in \mathbb{C}$. Une suite (u_n) est dite *géométrique de raison* q lorsque
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = qu_n.$$
On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = q^n u_0$.

Proposition 4.2.5

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{C}$ et $m, n \in \mathbb{Z}$ tels que $m \leqslant n$. Alors
$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \begin{cases} (n-m+1)u_0 \text{ si } q = 1 \\ \dfrac{u_m - u_{n+1}}{1-q} \text{ si } q \neq 1 \end{cases}.$$
Dans le cas où la raison est différente de 1, on retiendra la formule :
$$\frac{\text{premier terme} - \text{terme suivant}}{1 - \text{raison}}.$$

Exercices 3

⇨ Montrer que la suite de terme général
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$$
est convergente.

⇨ Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\sum_{k=0}^{n} kx^k.$$

Proposition 4.2.6

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} u_{2k} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} u_{2k+1}$$

Exercice 4

⇨ Calculer la somme

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k.$$

4.2.2 Produit

Définition 4.2.4

Soit $m, n \in \mathbb{Z}$ tels que $m \leqslant n$ et $u_m, u_{m+1}, \ldots, u_{n-1}, u_n \in \mathbb{C}$. On définit

$$\prod_{k=m}^{n} u_k := u_m \cdot u_{m+1} \cdots u_{n-1} \cdot u_n.$$

Remarques

⇨ Lorsque $n = m - 1$, la convention est de poser $\prod_{k=m}^{n} u_k := 1$. Cette convention permet d'écrire

$$\forall n \geqslant m, \quad \prod_{k=m}^{n} u_k = u_n \prod_{k=m}^{n-1} u_k.$$

⇨ Si $m, n \in \mathbb{Z}$ sont tels que $n \geqslant m - 1$. Alors, quel que soit $a \in \mathbb{C}$

$$\prod_{k=m}^{n} a = a^{n-m+1}.$$

⇨ Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k.$$

Exercice 5

⇨ Exprimer, à l'aide de factorielles, les produits

$$\prod_{k=1}^{n} (2k) \quad \text{et} \quad \prod_{k=1}^{n} (2k+1).$$

Proposition 4.2.7

Soit $m, n \in \mathbb{Z}$ et $(u_k)_{k \in \mathbb{Z}}, (v_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ deux suites d'éléments de $\mathbb{C}$. Alors

$$\prod_{k=m}^{n} u_k v_k = \left(\prod_{k=m}^{n} u_k\right)\left(\prod_{k=m}^{n} v_k\right).$$

4.2.3 Somme et produit doubles

On parle de somme double lorsqu'il y a deux indices. Pour sommer les éléments $u_{i,j}$ d'un tableau à n lignes et m colonnes, on peut procéder d'au moins deux manières : une sommation en lignes ou en colonnes. Évidemment, le résultat est le même.

Proposition 4.2.8: Fubini

Soit $m_1, n_1, m_2, n_2 \in \mathbb{Z}$ et $(u_{i,j})$ une famille d'éléments de $\mathbb{C}$. Alors

$$\sum_{i=m_1}^{n_1} \sum_{j=m_2}^{n_2} u_{i,j} = \sum_{j=m_2}^{n_2} \sum_{i=m_1}^{n_1} u_{i,j}.$$

Remarque

⇨ Cette somme est parfois notée

$$\sum_{\substack{m_1 \leqslant i \leqslant n_1 \\ m_2 \leqslant j \leqslant n_2}} u_{i,j} \quad \text{ou} \quad \sum_{(i,j) \in [\![m_1, n_1]\!] \times [\![m_2, n_2]\!]} u_{i,j}.$$

Exercices 6

⇨ Calculer

$$\sum_{0 \leqslant i,j \leqslant n} ij \quad \text{et} \quad \sum_{0 \leqslant i,j \leqslant n} (i+j).$$

⇨ Calculer

$$\sum_{0 \leqslant i,j \leqslant n} \binom{i}{j}.$$

⇨ Calculer

$$\sum_{k=1}^{n} k 2^k$$

en remarquant astucieusement que $k = \sum_{i=1}^{k} 1$.

Remarque

⇨ On peut aussi sommer en diagonale.

Exercice 7

⇨ Calculer

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |i - j|.$$

Remarque

⇨ Si

$$P := \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \quad \text{et} \quad Q := \sum_{j=0}^{m} b_j X^j$$

alors, en posant par convention $a_k := 0$ pour $k > n$ et $b_k := 0$ pour $k > m$, on a

$$PQ = \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) X^k = \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \right) X^k.$$

Exemple

⇨ Pour mieux appréhender cette formule, considérons un exemple. Si $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3$ et $Q = b_0 + b_1 X + b_2 X^2$, on a

$$\begin{aligned} PQ &= \left(a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3\right)\left(b_0 + b_1 X + b_2 X^2\right) \\ &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) X + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) X^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0) X^3 + (a_2 b_2 + a_3 b_1) X^4 + (a_3 b_2) X^5 \\ &= \sum_{k=0}^{5} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \right) X^k \\ &= \sum_{k=0}^{5} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) X^k. \end{aligned}$$

Exercice 8

⇨ Soit $P := (1+X)^n$ et $Q := (1+X)^m$ deux polynômes. Calculer les coefficients du produit PQ. En déduire la formule de VANDERMONDE

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{m}{p-k}=\binom{n+m}{p}.$$

Calculer enfin

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2.$$

4.3 Trigonométrie

4.3.1 Égalité modulaire

Définition 4.3.1

Soit $m\in\mathbb{R}_+^*$ et $a,b\in\mathbb{R}$. On dit que a est *congru à b modulo m* et on note

$$a\equiv b\ [m]$$

lorsqu'il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $a=b+km$.

Exercice 9

⇨ Soit $a,b\in\mathbb{R}$. Quel est le lien logique entre

$$\text{« } a\equiv b\ [2\pi] \text{ »} \quad \text{et} \quad \text{« } a\equiv b\ [\pi] \text{ » ?}$$

Proposition 4.3.1

— Soit $m\in\mathbb{R}_+^*$ et $a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbb{R}$ tels que

$$a_1\equiv b_1\ [m] \quad \text{et} \quad a_2\equiv b_2\ [m].$$

Alors, quels que soient $k_1,k_2\in\mathbb{Z}$,

$$k_1a_1+k_2a_2\equiv k_1b_1+k_2b_2\ [m].$$

— Soit $m\in\mathbb{R}_+^*$ et $a,b\in\mathbb{R}$ tels que

$$a\equiv b\ [m].$$

Alors, si $c\in\mathbb{R}_+^*$

$$ac\equiv bc\ [mc].$$

Remarques

⇨ On en déduit qu'on peut raisonner avec les « $\equiv$ » de la même manière qu'avec « $=$ » pour résoudre les équations.

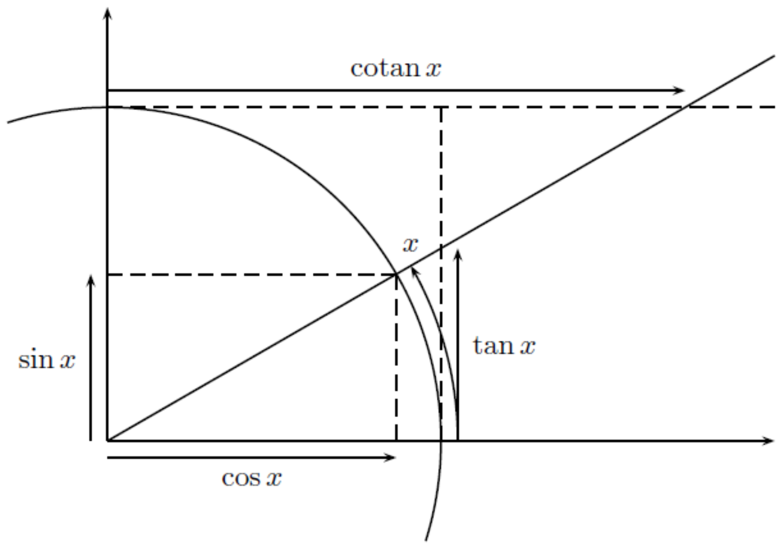
— On peut passer une expression d'un côté à l'autre du « $\equiv$ » en changeant son signe.
— On peut multiplier les deux côtés du signe « $\equiv$ » par un même coefficient $c\in\mathbb{R}_+^*$. Il suffit juste de multiplier le modulo par c.

Ces deux transformations permettent de raisonner par équivalence.

⇨ Si $a\in\mathbb{R}$ et $m\in\mathbb{R}_+^*$, alors l'ensemble des $x\in\mathbb{R}$ tels que $x\equiv a\ [m]$ est noté

$$a+m\mathbb{Z}:=\{a+km : k\in\mathbb{Z}\}.$$

4.3.2 Formules de trigonométrie



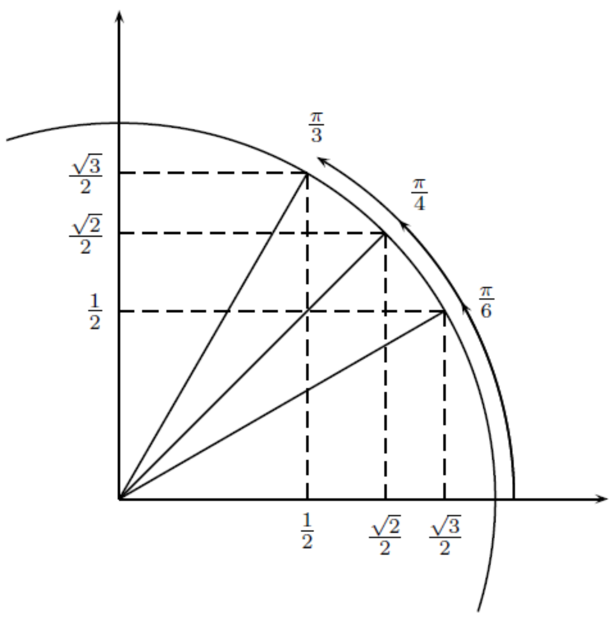
Définition 4.3.2

On définit le *sinus*, le *cosinus*, la *tangente* et la *cotangente* d'un angle x exprimé en radians sur le cerle trigonométrique de rayon 1 comme ci-dessus. En particulier $\tan x$ n'est défini que pour $x \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$, $\operatorname{cotan} x$ n'est défini que pour $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ et

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{et} \quad \operatorname{cotan} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Remarque

⇨ On rappelle les principales valeurs remarquables.



x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	indéfini
$\text{cotan}\, x$	indéfini	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

⇨ Si $x \in \mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$, alors

$$\text{cotan}\, x = \frac{1}{\tan x}.$$

Remarquons cependant que cotan est définie en $\pi/2$ alors que tan ne l'est pas.

Proposition 4.3.2

D'après Pythagore, on a

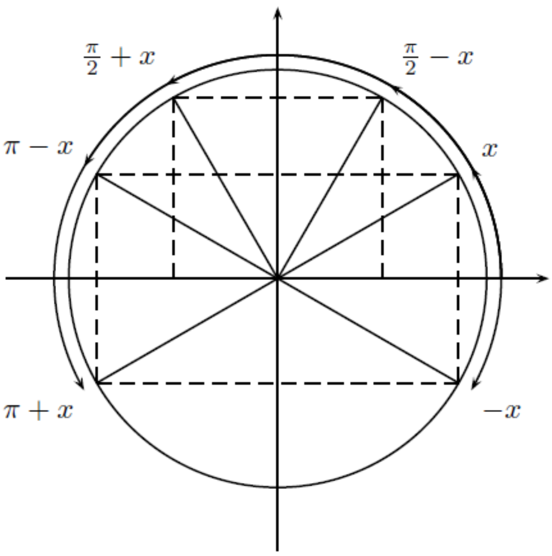
$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \qquad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$1 + \text{cotan}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Proposition 4.3.3: Symétries

$$\begin{aligned} \cos(-x) &= \cos x \\ \sin(-x) &= -\sin x \\ \tan(-x) &= -\tan x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \cos(\pi + x) &= -\cos x \\ \sin(\pi + x) &= -\sin x \\ \tan(\pi + x) &= \tan x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \cos(\pi - x) &= -\cos x \\ \sin(\pi - x) &= \sin x \\ \tan(\pi - x) &= -\tan x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= -\sin x \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= \cos x \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= -\text{cotan}\, x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sin x \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos x \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \text{cotan}\, x \end{aligned}$$



Remarque

⇨ Il est important de retrouver rapidement ces formules en dessinant le cercle trigonométrique et un « petit » angle x vérifiant $0 < x < \pi/4$.

Exercice 10

⇨ Calculer
$$\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right), \qquad \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right), \qquad \tan\left(-\frac{3\pi}{4}\right).$$

Proposition 4.3.4: Addition des arcs

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \qquad \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \qquad \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\begin{aligned} \tan(a+b) &= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \\ \tan(a-b) &= \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} \end{aligned}$$

Remarque

⇨ Si $a, b \in \mathbb{R}$ ne sont pas tous les deux nuls, on pourra factoriser $a\cos x + b\sin x$ de la manière suivante.
$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right)$$
Puisque
$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1,$$
il existe $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\cos\theta_0 = a/\sqrt{a^2+b^2}$ et $\sin\theta_0 = b/\sqrt{a^2+b^2}$. On a alors
$$\begin{aligned} a\cos x + b\sin x &= \sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\theta_0 \cos x + \sin\theta_0 \sin x) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\theta_0)\,. \end{aligned}$$

Exercice 11

⇨ Factoriser $\sqrt{3}\cos x + \sin x$.

Proposition 4.3.5: Angle double

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 2\cos^2 x - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2 x \\ \sin(2x) &= 2\cos x \sin x \\ \tan(2x) &= \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos^2 x &= \frac{1+\cos(2x)}{2} \\ \sin^2 x &= \frac{1-\cos(2x)}{2} \end{aligned}$$

Exercice 12

⇨ Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$p_n := \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{a}{2^k}\right).$$
Simplifier $p_n \sin(a/2^n)$ puis en déduire la limite de la suite (p_n).

Proposition 4.3.6: Linéarisation

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos\left(a+b\right) + \cos\left(a-b\right)\right]$$
$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left[\cos\left(a-b\right) - \cos\left(a+b\right)\right]$$
$$\cos a \sin b = \frac{1}{2}\left[\sin\left(a+b\right) - \sin\left(a-b\right)\right]$$

Exercice 13

⇨ Linéariser $\cos^3 x$, $\cos x \sin^2 x$, puis $\sin^4 x$.

Proposition 4.3.7: Factorisation

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \qquad \sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2} \qquad \sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

$$\tan p + \tan q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}$$
$$\tan p - \tan q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}$$

Exercice 14

⇨ En multipliant par $\sin(x/2)$, calculer

$$A := \sum_{k=0}^{n} \cos\left(kx\right) \quad \text{et} \quad B := \sum_{k=0}^{n} \sin^2\left(kx\right).$$

Proposition 4.3.8

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \not\equiv \pi\ [2\pi]$. Alors, en posant $t := \tan\left(x/2\right)$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Si de plus, $x \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, alors

$$\tan x = \frac{2t}{1-t^2}.$$

Remarque

⇨ Remarquons au passage que, puisque $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, on retrouve facilement

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 = 1.$$

Autrement dit

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \left(t^2-1\right)^2 + (2t)^2 = \left(1+t^2\right)^2.$$

Cette relation nous donne, pour $t \in \mathbb{N}$, des triplets $(a,b,c) \in \mathbb{N}^3$ non triviaux tels que $a^2 + b^2 = c^2$. Par exemple, pour $t = 2$, on obtient $3^2 + 4^2 = 5^2$.

4.4 Récurrence linéaire

4.4.1 Récurrence linéaire d'ordre 1

Étant donné une suite (v_n), on cherche à calculer le terme général d'une suite (u_n) vérifiant

$$(E) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = a u_n + v_n$$

où $a \in \mathbb{K}^*$. On dispose de plusieurs méthodes selon la suite (v_n) :

★ Si la suite (v_n) est constante égale à $b \in \mathbb{K}$:
- Ou bien $a = 1$ auquel cas on a affaire à une suite arithmétique de raison b et
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = u_0 + nb.$$
- Ou bien $a \neq 1$ auquel cas on a affaire à une suite *arithmético-géométrique*. Une méthode consiste alors à trouver un point fixe, c'est-à-dire résoudre $z = az + b$ de solution $\omega := \dfrac{b}{1-a}$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_{n+1} - \omega = au_n + b - (a\omega + b) = a(u_n - \omega)$$
si bien que la suite $(u_n - \omega)$ est géométrique de raison a et de premier terme $u_0 - \omega$. Ainsi
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = a^n(u_0 - \omega) + \omega.$$

★ Si la suite (v_n) n'est pas constante, on présente ici deux méthodes (à choisir selon la situation) :
- *Méthode de la sommation télescopique :* On commence par remarquer que
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{k+1}}{a^{k+1}} - \frac{u_k}{a^k} = \frac{v_k}{a^{k+1}},$$
puis on somme cette relation pour k allant de 0 à $n-1$. On obtient une somme télescopique, puis
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_n}{a^n} - u_0 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{v_k}{a^{k+1}}$$
donc
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 a^n + \sum_{k=0}^{n-1} v_k a^{n-(k+1)}.$$
- *Méthode de superposition :* Le *théorème de superposition* nous dit que si (w_n) est solution particulière de (E), l'ensemble des solutions s'obtient comme somme de cette solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène associée ; dans ce cas, c'est la relation de récurrence
$$(E_H) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n.$$
Les solutions de (E) sont donc les suites de la forme
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n := \lambda a^n + w_n$$
où $\lambda \in \mathbb{C}$. **Cette méthode se généralise aux récurrences linéaires d'ordre quelconque.**

Exercices 15

⇨ Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer le n-ième terme de la suite (u_n) définie par
$$u_0 := a \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} := \frac{3}{2}u_n + 5.$$

⇨ On considère la récurrence linéaire
$$(E) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - 2u_n = n^2.$$

1. Déterminer une solution polynomiale de (E).
2. En déduire toutes les solutions.

4.4.2 Récurrence linéaire d'ordre 2

Proposition 4.4.1

Soit $a, b \in \mathbb{C}$. On souhaite trouver les suites (u_n) vérifiant
$$(E) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$
On résout sur $\mathbb{C}$ l'équation caractéristique $z^2 = az + b$.
- Si cette équation admet deux racines distinctes r_1 et $r_2 \in \mathbb{C}$, alors les solutions de (E) sont les

suites (u_n) définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n := \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

— Si cette équation admet une racine double $r \in \mathbb{C}^*$, alors les solutions de (E) sont les suites (u_n) définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n := (\lambda + \mu n)\, r^n$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Démonstration. Soit $a, b \in \mathbb{C}$. On souhaite trouver les suites (u_n) vérifiant

$$(E) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n.$$

On commence par chercher les suites solutions de (E) de la forme (r^n). Soit $r \in \mathbb{C}$. On définit la suite (u_n) par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n := r^n.$$

Alors

$$\begin{aligned}
(u_n) \text{ est solution de } (E) &\iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n \\
&\iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad r^{n+2} = a r^{n+1} + b r^n \\
&\iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad r^n \left(r^2 - ar - b\right) = 0 \\
&\iff r^2 - ar - b = 0
\end{aligned}$$

Dans la dernière equivalence, le sens $\Longleftarrow$ est évident, et le sens $\Longrightarrow$ s'obtient en prenant $n = 0$. En conclusion (r^n) est solution de (E) si et seulement si r est solution de l'équation caractéristique $z^2 = az + b$.

★ Supposons que cette équation admette deux racines distinctes $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$. Montrons que les solutions (E) sont les suites $(\lambda r_1^n + \mu r_2^n)$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

— Ce sont des solutions de (E). En effet, soit $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ et (u_n) la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n := \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} &= \lambda r_1^{n+2} + \mu r_2^{n+2} \\
&= \lambda \left(a r_1^{n+1} + b r_1^n\right) + \mu \left(a r_2^{n+1} + b r_2^n\right) \\
& \text{car } (r_1^n) \text{ et } (r_2^n) \text{ sont solutions de } E \\
&= a \left(\lambda r_1^{n+1} + \mu r_2^{n+1}\right) + b \left(\lambda r_1^n + \mu r_2^n\right) \\
&= a u_{n+1} + b u_n.
\end{aligned}$$

Donc (u_n) est solution de (E).

— Réciproquement, soit (u_n) une solution de (E). Montrons qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. On définit la suite (v_n) par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n := \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\begin{cases} v_0 = u_0 \\ v_1 = u_1 \end{cases} &\iff \begin{cases} \lambda + \mu = u_0 \\ r_1 \lambda + r_2 \mu = u_1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \lambda + \mu = u_0 \\ (r_2 - r_1)\mu = u_1 - r_1 u_0 \quad L_2 \leftarrow L_2 - r_1 L_1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \lambda = \frac{u_1 - r_2 u_0}{r_1 - r_2} \\ \mu = \frac{u_1 - r_1 u_0}{r_2 - r_1} \end{cases} \\
& \text{car } r_2 - r_1 \neq 0.
\end{aligned}$$

On pose donc $\lambda := (u_1 - r_2 u_0)/(r_1 - r_2)$ et $\mu := (u_1 - r_1 u_0)/(r_2 - r_1)$. Les suites (u_n) et (v_n) sont donc deux solutions de (E) telles que $u_0 = v_0$ et $u_1 = v_1$. Une récurrence montre alors facilement que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n$. On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

On a donc prouvé que les solutions de (E) sont les suites $(\lambda r_1^n + \mu r_2^n)$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

★ Supposons maintenant que l'équation $z^2 - az - b = 0$ admette une racine double $r \in \mathbb{C}^*$. Puisque la somme des racines est a, on en déduit que $2r = a$. Montrons que les solutions de (E) sont les suites $((\lambda + \mu n)r^n)$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

— Ce sont des solutions de (E). On sait déjà que (r^n) est une solution de (E). Montrons que la suite (u_n) définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = nr^n$$
en est une autre. On a
$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} - (au_{n+1} + bu_n) &= (n+2)r^{n+2} - \left[a(n+1)r^{n+1} + bnr^n\right] \\ &= r^n\left[(n+2)r^2 - (n+1)ar - bn\right] \\ &= r^n\Big[\underbrace{(r^2 - ar - b)}_{=0} n + r\underbrace{(2r-a)}_{=0}\Big] \\ &= 0\end{aligned}$$
donc (nr^n) est solution de E. On en déduit facilement que si $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ la suite $(\lambda r^n + \mu n r^n)$ est une solution de (E).

— Réciproquement, soit (u_n) une solution de (E). Montrons qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tels que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\lambda + \mu n)r^n.$$
Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. On définit la suite (v_n) par
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n := (\lambda + \mu n)r^n.$$
Alors
$$\begin{aligned}\begin{cases} v_0 = u_0 \\ v_1 = u_1 \end{cases} &\iff \begin{cases} \lambda = u_0 \\ r\lambda + r\mu = u_1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda = u_0 \\ r\mu = u_1 - ru_0 \quad L_2 \leftarrow L_2 - rL_1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda = u_0 \\ \mu = \frac{u_1 - ru_0}{r} \end{cases} \\ &\text{car } r \neq 0\ .\end{aligned}$$
On pose donc $\lambda := u_0$ et $\mu := (u_1 - ru_0)/r$. Les suites (u_n) et (v_n) sont donc deux solutions de (E) telles que $u_0 = v_0$ et $u_1 = v_1$. Une récurrence montre alors facilement que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n$. On en déduit que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\lambda + \mu n)r^n.$$

On a donc prouvé que les solutions de (E) sont les suites $((\lambda + \mu n)r^n)$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

□

Exercices 16

⇨ Calculer le n-ième terme de la suite de FIBONACCI définie par
$$F_0 := 1, \qquad F_1 := 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} := F_{n+1} + F_n.$$

⇨ Soit (u_n) la suite définie par
$$u_0 := 1, \qquad u_1 := -1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad 6u_{n+2} + 5u_{n+1} - 6u_n = 0.$$
Montrer que (u_n) diverge.

⇨ Calculer le n-ième terme de la suite (u_n) définie par
$$u_0 := a > 0, \quad u_1 := b > 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} := \frac{1}{u_{n+1}^2 u_n}.$$

Remarque

⇨ La suite de FIBONACCI est ainsi nommée en hommage à LEONARDO PISANO (Leonard de Pise, 1170–1240) appelé aussi LEONARDO FIBONACCI, qui avait publié cette suite en 1202. Il avait lu le travail de AL-KHWARIZMI (780–850), un mathématicien Persan. Le livre de FIBONACCI contient le problème suivant. Combien de couples de lapins peuvent naître d'un couple de lapin en un an ? Pour résoudre ce problème, on sait que :

— Jusqu'au premier mois inclus, il n'y a qu'un couple de lapins.

— Chaque couple de lapin donne naissance à un couple tous les mois.
— Chaque jeune couple devient fertile à l'âge d'un mois.

Avant le travail de FIBONACCI, la suite (F_n) a déjà été étudiée par les Indiens qui se demandaient combien de rythmes de n temps il était possible de faire avec des noires et des blanches.

Proposition 4.4.2

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. On souhaite trouver les suites (u_n) vérifiant

$$(E) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

On résout sur $\mathbb{C}$ l'équation caractéristique $z^2 = az + b$.

— Si cette équation admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, alors les solutions de (E) sont les suites (u_n) définies par
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n := \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$
où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

— Si cette équation admet une racine double $r \in \mathbb{R}^*$, alors les solutions de (E) sont les suites (u_n) définies par
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n := (\lambda + \mu n)\, r^n$$
où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

— Si cette équation admet deux racines complexes conjuguées $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}$ et $r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}$, alors les solutions de (E) sont les suites (u_n) définies par
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n := [\lambda \cos(\omega n) + \mu \sin(\omega n)]\, r^n$$
où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Les deux premiers cas sont une conséquence de la proposition précédente. Il reste donc à traiter le cas où $\Delta < 0$.

L'EC admet alors deux racines conjuguées $re^{i\omega}$ et $re^{-i\omega}$.

Analyse : Soit (u_n) une solution réelle de (E). D'après la proposition précédente, on peut fixer $(A, B) \in \mathbb{C}^2$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = Ar^n\mathrm{e}^{i\omega n} + Br^n\mathrm{e}^{-i\omega n} = r^n \left(A\mathrm{e}^{i\omega n} + B\mathrm{e}^{-i\omega n}\right).$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \mathrm{Re}(u_n) = r^n \,\mathrm{Re}\left(A\mathrm{e}^{i\omega n} + B\mathrm{e}^{-i\omega n}\right)$ qui est donc de la forme $u_n = [c_1 \cos(\omega n) + c_2 \sin(\omega n)]\, r^n$.

Synthèse : Réciproquement, soit $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$. Définissons (u_n) pour tout n entier naturel par

$$u_n = (c_1 \cos(\omega n) + c_2 \sin(\omega n))\, r^n.$$

On applique les formules d'Euler pour s'apercevoir que (u_n) ainsi définie est bien solution de (E) car de la forme des solutions de la proposition précédente.

□

Remarque

⇨ Dans le cas où l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées, les solutions de (E) peuvent s'écrire sous la forme
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n := \lambda \sin(\omega n - \varphi) r^n$$
où $\lambda, \varphi \in \mathbb{R}$.

Exercices 17

⇨ Soit (u_n) la suite définie par

$$u_0 := 1, \quad u_1 := 0, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} := 2u_{n+1} - 4u_n.$$

Déterminer les $n \in \mathbb{N}$ pour lesquels $u_n = 0$.

⇨ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Calculer le n-ième terme de la suite (u_n) définie par

$$u_0, u_1 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} := 2\cos(\alpha)\, u_{n+1} - u_n.$$

4.5 Système linéaire

4.5.1 Système linéaire à q équations et p inconnues

Définition 4.5.1

On appelle *système linéaire* à q équations et p inconnues tout système d'équations du type

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = y_1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{q,1}x_1 + a_{q,2}x_2 + \cdots + a_{q,p}x_p = y_q \end{cases}$$

où $a_{1,1}, \ldots, a_{q,p}, y_1, \ldots, y_q \in \mathbb{K}$ et $x_1, \ldots, x_p \in \mathbb{K}$ sont les inconnues. On dit que le système est *compatible* lorsqu'il admet au moins une solution. On dit qu'il est *incompatible* sinon.

Remarques

⇨ Pour des raisons de lisibilité, on veillera à toujours placer les inconnues les unes en dessous des autres.

⇨ L'ensemble des solutions est l'ensemble $\mathcal{S}$ des $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ solution du système.

Exercice 18

⇨ Résoudre le système suivant par substitution, puis en utilisant la méthode du pivot de Gauss.

$$\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 3x \; + y = 9. \end{cases}$$

Proposition 4.5.1

Les opérations suivantes, appelées opérations élémentaires, transforment un système linéaire en un système linéaire équivalent.

- Changer l'ordre des équations.
- Changer l'ordre des inconnues.
- Multiplier une équation par $\mu \in \mathbb{K}^*$.
- Ajouter λ fois (avec $\lambda \in \mathbb{K}$) une équation à l'une des équations suivantes.

Remarque

⇨ En pratique, afin d'expliciter les opérations que l'on vient d'effectuer, on utilisera les notations suivantes.

- $L_i \leftrightarrow L_j$ signifie qu'on a échangé les lignes i et j.
- $L_i \leftarrow \mu L_i$ signifie qu'on a multiplié la ligne L_i par le coefficient μ non nul.
- $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ signifie qu'on a ajouté λ fois la ligne L_j à la ligne L_i.

Exercice 19

⇨ Les opérations élémentaires suivantes conservent-elles l'équivalence ?

- $L_1 \leftarrow L_2$.
- $L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3$.
- $L_1 \leftarrow 2L_1 + L_2$.
- $L_1 \leftarrow \alpha L_1 + \beta L_2$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.
- $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$ et $L_2 \leftarrow L_1 - L_2$.

Proposition 4.5.2

L'algorithme du pivot de Gauss permet de transformer, quitte à échanger les variables, un système linéaire à q équations et p inconnues en un système linéaire équivalent de la forme

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \quad \cdots \quad + a_{1,p}x_p = y_1 \\ \qquad\quad a_{2,2}x_2 + \quad \cdots \quad + a_{2,p}x_p = y_2 \\ \qquad\qquad\qquad \ddots \qquad\qquad\quad = \vdots \\ \qquad\qquad\qquad a_{r,r}x_r + \cdots + a_{r,p}x_p = y_r \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = y_{r+1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots = \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = y_q \end{cases}$$

où $a_{1,1}, \ldots, a_{r,r}$ sont tous non nuls. On dit d'un tel système qu'il est *échelonné à pivots diagonaux.*

— Le système est compatible si et seulement si $(y_{r+1}, \dots, y_q) = (0, \dots, 0)$.
— Le système admet une unique solution si et seulement si il est compatible et $r = p$.

Exercices 20

⇨ Résoudre les systèmes

$$\begin{cases} 5x & +y = 1 \\ 11x + 2y = 3, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 5x + 2y = 1. \end{cases}$$

⇨ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre le système

$$\begin{cases} x & +y & -z = 1 \\ 2x & +y + 2z = 2 \\ 3x + 2y & +z = \alpha. \end{cases}$$

Remarques

⇨ Voici une présentation détaillée de l'algorithme du Pivot de Gauss.

★ **On transforme le système en un système échelonné.**

- On commence par déterminer un coefficient $a_{i,j}$ non nul que l'on appelle *pivot*. Très souvent $a_{1,1}$ conviendra, mais il est encore plus pratique pour la suite des calculs si ce pivot est ± 1. En effectuant un échange de lignes et d'inconnues, on « remonte » ce coefficient en haut à gauche du système. On se retrouve donc dans le cas où $a_{1,1} \neq 0$. On utilise alors $a_{1,1}$ comme *pivot* pour éliminer l'inconnue x_1 sur les $q-1$ dernières lignes du système :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = y_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = y_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{q,1}x_1 + a_{q,2}x_2 + \cdots + a_{q,p}x_p = y_q \end{cases} \iff \begin{cases} a'_{1,1}x_1 + a'_{1,2}x_2 + \cdots + a'_{1,p}x_p = y'_1 \\ \qquad a'_{2,2}x_2 + \cdots + a'_{1,p}x_p = y'_2 \\ \qquad \vdots \\ \qquad a'_{q,2}x_2 + \cdots + a'_{q,p}x_p = y'_q \end{cases}$$

  Pour cela, il suffit d'effectuer les opérations suivantes.

$$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} \cdot L_1, \qquad L_3 \leftarrow L_3 - \frac{a_{3,1}}{a_{1,1}} \cdot L_1, \qquad \dots \qquad L_q \leftarrow L_q - \frac{a_{q,1}}{a_{1,1}} \cdot L_1.$$

- On recommence ensuite le même procédé sur les $q-1$ dernières équations du système, en ne touchant plus à la première ligne. On cherche d'abord un coefficient $a'_{i,j}$ non nul pour lequel $i \geqslant 2$ et $j \geqslant 2$. Si un tel coefficient existe, un échange de lignes et d'inconnues permet de se ramener au cas où $a'_{2,2} \neq 0$ et de continuer l'algorithme. On réitère ensuite le procédé jusqu'à ce qu'on ne soit plus capable de trouver de pivot. Le système est alors échelonné.
  Au cours du calcul, s'il apparaît l'équation $0 = 0$, on l'élimine du système. Si au contraire il apparaît l'équation $0 = b$ avec $b \neq 0$, le système n'admet aucune solution et la résolution est terminée.

★ **On introduit les paramètres t_k.**
Dans le cas où le système admet au moins une solution, on aboutit à un système de la forme

$$\begin{cases} a''_{1,1}x_1 + a''_{1,2}x_2 + \quad \cdots \quad + a''_{1,p}x_p = y''_1 \\ \qquad a''_{2,2}x_2 + \quad \cdots \quad + a''_{2,p}x_p = y''_2 \\ \qquad\qquad \ddots \qquad\qquad = \vdots \\ \qquad\qquad a''_{r,r}x_r + \cdots + a''_{r,p}x_p = y''_r \end{cases}$$

où les $a''_{1,1}, a''_{2,2}, \dots, a''_{r,r}$ sont tous non nuls. Afin de paramétrer l'ensemble des solutions, on remarque que ce dernier système est équivalent au système triangulaire

$$\exists t_{r+1}, \dots, t_p \in \mathbb{K}, \quad \begin{cases} a''_{1,1}x_1 + a''_{1,2}x_2 + \quad \cdots \quad + a''_{1,p}x_p = y''_1 \\ \qquad a''_{2,2}x_2 + \quad \cdots \quad + a''_{2,p}x_p = y''_2 \\ \qquad\qquad \ddots \qquad\qquad = \vdots \\ \qquad\qquad a''_{r,r}x_r + \cdots + a''_{r,p}x_p = y''_r \\ \qquad\qquad\qquad x_{r+1} \qquad = t_{r+1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \ddots \qquad = \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x_p = t_p. \end{cases}$$

En effet, si $(x_1, \dots, x_p)$ est solution de ce dernier système, on obtient le système précédent en ne gardant que les r premières lignes. Réciproquement, si $(x_1, \dots, x_p)$ est solution du système échelonné, on obtient ce dernier système en posant $t_{r+1} := x_{r+1}, \dots, t_p := x_p$.

★ **On résout le système triangulaire**.
Ce dernier système se résout simplement en remontant les calculs de la dernière ligne à la première par substitution. On obtient ainsi le système équivalent

$$\exists t_{r+1},\dots,t_p\in\mathbb{K},\quad \begin{cases} x_1 = c_1 + d_{1,r+1}t_{r+1} + \cdots + d_{1,p}t_p \\ \vdots = \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ x_r = c_r + d_{r,r+1}t_{r+1} + \cdots + d_{r,p}t_p \\ x_{r+1} = \qquad t_{r+1} \\ \vdots = \qquad\qquad \ddots \\ x_p = \qquad\qquad\qquad t_p \end{cases}$$

qui est un *paramétrage* de l'ensemble des solutions.
Remarquons que lorsque les calculs sont complexes, au lieu de résoudre directement le système triangulaire par substitution, on peut aussi effectuer un pivot de Gauss « à l'envers » en commençant par éliminer les x_p des $p-1$ premières équations avec la dernière ligne, puis en éliminant les x_{p-1} des $p-2$ premières équations avec l'avant-dernière ligne, etc...

⇨ Lorsqu'on applique l'algorithme du pivot de Gauss, on est libre de choisir le pivot que l'on souhaite. La seule contrainte est qu'il soit non nul. L'expérience montre cependant que certains choix sont plus judicieux que d'autres car ils conduisent à des calculs plus simples.
Par exemple, un pivot égal à 1 est idéal car les opérations sur les lignes sont réduites à $L_i \leftarrow L_i - a_{i,1}L_1$. On évite ainsi les divisions, ce qui offre de nombreux avantages. Par exemple, lorsque les coefficients du système sont entiers, ils le restent après réduction du système. Dans le même ordre d'idées, avant de choisir le pivot, lorsque les coefficients d'une même ligne sont des multiples d'un entier $a\in\mathbb{Z}^*$, il est bon de simplifier cette ligne par a.
Enfin, lorsque les coefficients du système dépendent d'un paramètre α, il toujours préférable d'utiliser un pivot ne dépendant pas de α. Cette stratégie permet d'éviter de discuter les cas où ce terme peut s'annuler, et limite la propagation de ce paramètre à tous les autres coefficients du système.

⇨ On montrera plus tard que l'entier r est indépendant des opérations élémentaires effectuées. **On l'appelle *rang* du système**. Dans le cas où le système est compatible, en posant $d := p-r$, on remarque que l'ensemble des solutions est paramétré par les d coefficients $t_{r+1},\dots,t_p$. En physique ou en sciences industrielles, on dit que l'ensemble des solutions admet d degrés de liberté. Par exemple, si $d=1$, l'ensemble des solutions est une droite affine. Si $d=2$, l'ensemble des solutions est un plan affine. Le fait que $p=d+r$ est un résultat que nous retrouverons dans le cours d'algèbre linéaire sous le nom de *théorème du rang*.

Exercice 21

⇨ Discuter et résoudre les systèmes suivants selon la valeur de $\alpha\in\mathbb{R}$

$$\begin{cases} -3a+\alpha b = 0 \\ -3a - b + 2\alpha c = 0 \\ -2b + c + 3\alpha d = 0 \\ -c + 3d = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} a + b + c + d = 3 \\ a + \alpha b + c - \alpha d = \alpha+2 \\ \alpha a - b - \alpha c - \alpha d = -1. \end{cases}$$

Remarques

⇨ Il est parfois pratique dans les calculs d'omettre le nom des variables. On utilise alors ce qu'on appelle une *matrice augmentée*.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x+2y=1 \\ x+3y=4 \end{cases} &\iff \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{array}\right) \\ &\iff \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right) L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ &\iff \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right) L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ &\iff \begin{cases} x = -5 \\ y = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Cette technique a l'avantage d'écrire le minimum nécessaire et de vous obliger à aligner les coefficients les uns au-dessus des autres. Son seul inconvénient est de rendre impossible le changement d'ordre des inconnues.

⇨ L'échange des inconnues étant impossible, il arrive que cette méthode nous empêche de réduire le système à un système échelonné à pivots diagonaux. On se contente donc d'un *système échelonné*, c'est-à-dire un système où chaque ligne commence par un nombre de zéros strictement supérieur à celui de la ligne précédente, comme dans l'exemple suivant :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & * & * & * & * \\ 0 & 0 & a_{2,3} & * & * \\ 0 & 0 & 0 & a_{3,4} & * \end{array}\right)$$

où $a_{1,1}, a_{2,3}$ et $a_{3,4}$ sont des coefficients non nuls qu'on appelle encore *pivots*. On réintroduit ensuite les inconnues, avant de les réordonner pour obtenir un système échelonné à pivots diagonaux et finir la résolution du système.

Définition 4.5.2

On considère un système linéaire à q équations et p inconnues.

$$(E) \qquad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = y_1 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{q,1}x_1 + a_{q,2}x_2 + \cdots + a_{q,p}x_p = y_q \end{cases}$$

— On dit qu'il est *homogène* lorsque $(y_1, \ldots, y_q) = (0, \ldots, 0)$.
— On appelle *système linéaire homogène* associé à (E), le système obtenu en remplaçant les y_i par 0.

Remarque

⇨ Le p-uplet $(x_1, \ldots, x_p) = (0, \ldots, 0)$ est toujours solution d'un système homogène. On dit que c'est la *solution triviale*. Il est possible que ce soit la seule solution ou qu'il y en ait d'autres.

4.5.2 Interprétation géométrique lorsque $p = 2$ ou $p = 3$

Dans cette partie, nous allons donner une interprétation géométrique des résultats précédents aux cas $p = 2$ et $p = 3$. Commençons par le cas $p = 2$. On munit le plan d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. On rappelle qu'un point M du plan est déterminé de manière unique par ses coordonnées $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ définies par

$$\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{e_1} + y\,\overrightarrow{e_2}.$$

Proposition 4.5.3

— Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $(a, b) \neq (0, 0)$. Alors l'ensemble d'équation $ax + by = c$ est une droite $\mathcal{D}$ de vecteur normal $\overrightarrow{u}$ de coordonnées (a, b).
— Réciproquement, soit $\mathcal{D}$ une droite de vecteur normal $\overrightarrow{u}$ de coordonnées (a, b). Alors, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $ax + by = c$ est une équation de $\mathcal{D}$.

Résoudre un système linéaire à q équations et 2 inconnues x et y dont chaque ligne contient un coefficient non nul revient donc à déterminer l'intersection de q droites du plan. Le cas où $q = 2$ est important.
— Si les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ne sont pas parallèles, alors elles se coupent en un unique point. Le système admet donc une unique solution.
— Si les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont parallèles, deux cas se présentent.
  — Si elles ne sont pas confondues, elles ne se coupent pas. Le système n'admet donc aucune solution.
  — Si elles sont confondues, le système admet une infinité de solutions. Ce sont les coordonnées des points de cette droite.

Pour obtenir une interprétation géométrique du cas $p = 3$, on munit l'espace d'un repère orthonormé

$$\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}).$$

On rappelle qu'on point M de l'espace est déterminé de manière unique par ses coordonnées $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ définies par

$$\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{e_1} + y\,\overrightarrow{e_2} + z\,\overrightarrow{e_3}.$$

Proposition 4.5.4

— Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Alors l'ensemble d'équation $ax + by + cz = d$ est un plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\overrightarrow{u}$ de coordonnées (a, b, c).
— Réciproquement, soit $\mathcal{P}$ un plan de vecteur normal $\overrightarrow{u}$ de coordonnées (a, b, c). Alors, il existe $d \in \mathbb{R}$ tel que $ax + by + cz = d$ est une équation de $\mathcal{P}$.

Résoudre un système linéaire à q équations et 3 inconnues x, y et z dont chaque ligne contient un coefficient non nul revient donc à déterminer l'intersection de q plans dans l'espace. Le cas où $q = 3$ est important.

- Si le rang du système est égal à 3, les 3 plans s'intersectent en un unique point.
- S'il est strictement inférieur à 3 et que le système n'est pas compatible, l'intersection des plans est vide. Sinon :
  - Soit le rang est égal à 2 et l'intersection des 3 plans est une droite.
  - Soit le rang est égal à 1 et l'intersection des 3 plans est un plan.

Chapitre 5

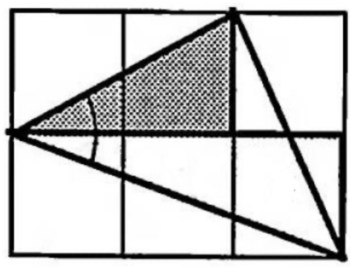
Fonctions usuelles

« En mathématiques, on ne comprend pas les choses, on s'y habitue. »

— JOHN VON NEUMANN (1903–1957)

« Le logarithme de JOHN NAPIER, en réduisant leur travail, a doublé la vie des astronomes. »

— PIERRE-SIMON LAPLACE (1749–1827)



« $\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$. »

— LEONHARD EULER (1707–1783)

5.1 Logarithme, exponentielle, puissance

5.1.1 Logarithme népérien

Définition 5.1.1

On appelle *logarithme népérien* et on note ln l'unique primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $x \mapsto 1/x$ qui s'annule en 1.

$$\ln : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} \end{array}$$

Remarque

⇨ Le nom ln est à la fois l'acronyme de logarithme naturel et de logarithme népérien (en hommage à John Napier, mathématicien Écossais, 1550–1617).

Proposition 5.1.1

— ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
— ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln' x = \frac{1}{x}.$$

Remarque

⇨ La fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln|x| \end{array}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = 1/x$. Autrement dit, sur $\mathbb{R}^*$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x|.$$

Proposition 5.1.2

$$\begin{aligned} & \ln 1 = 0, \\ \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \quad & \ln(xy) = \ln x + \ln y, \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad & \ln(1/x) = -\ln x, \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad & \ln x^n = n \ln x. \end{aligned}$$

Proposition 5.1.3

ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus

$$\ln x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty \quad \text{et} \quad \ln x \xrightarrow[x \to 0]{} -\infty.$$

Exercice 1

⇨ Résoudre l'inéquation $\ln|x+1| - \ln|2x+1| \leqslant \ln 2$.

Proposition 5.1.4

ln réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.

Définition 5.1.2

Il existe un unique réel, noté e et appelé *nombre de* Néper, tel que $\ln \mathrm{e} = 1$.

Proposition 5.1.5

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \cdot \ln x.$$

Proposition 5.1.6

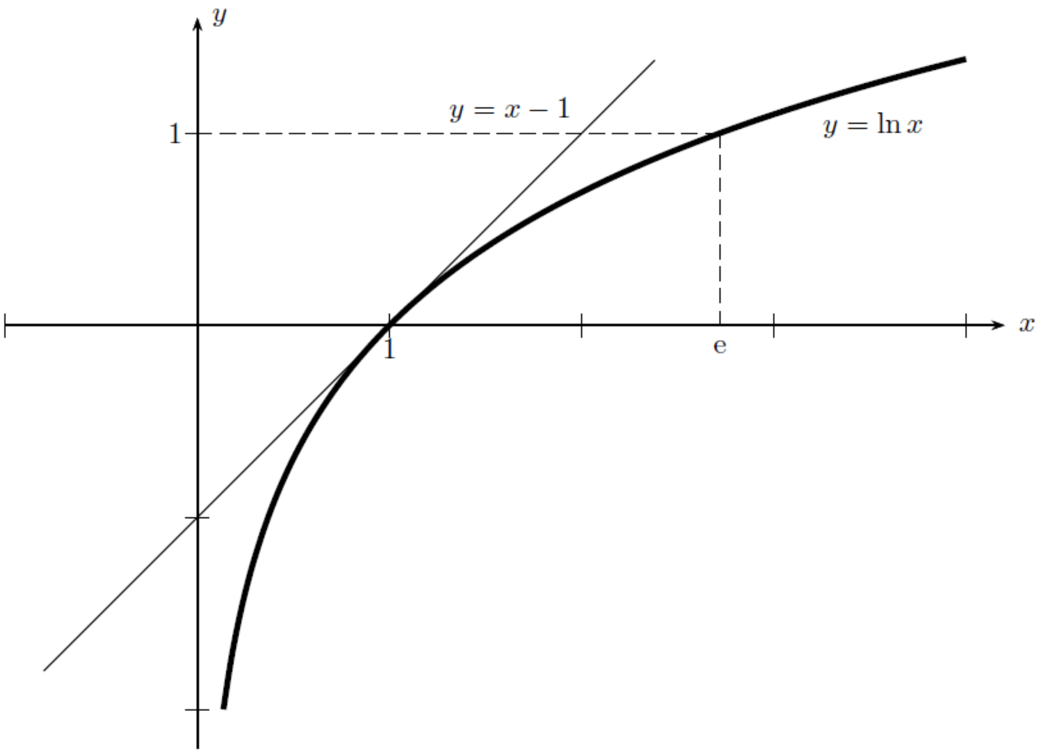
$$\forall x \in]-1, +\infty[, \quad \ln(1+x) \leqslant x.$$

Exercice 2

⇨ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n+1} \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}$.

Proposition 5.1.7

$$\frac{x}{\ln x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty, \qquad x \ln x \xrightarrow[x \to 0]{} 0,$$
$$\frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1.$$



5.1.2 Exponentielle

Définition 5.1.3

Pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe un unique $x \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\ln x = y$; on le note $\exp y$. On définit ainsi la fonction

$$\begin{array}{rccl} \exp : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & y & \longmapsto & \exp y. \end{array}$$

Remarques

⇨ Autrement dit, la corestriction de exp à $\mathbb{R}_+^*$ est la bijection réciproque de ln.

⇨ Par définition

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp x > 0.$$

Proposition 5.1.8

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \qquad & \ln(\exp x) = x, \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad & \exp(\ln x) = x. \end{aligned}$$

Proposition 5.1.9

exp réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

Proposition 5.1.10

$$\begin{aligned} \exp 0 = 1, \qquad & \exp 1 = \mathrm{e}, \\ \forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad & \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y), \\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad & \exp(-x) = \frac{1}{\exp x}, \\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \qquad & \exp(nx) = (\exp x)^n. \end{aligned}$$

Proposition 5.1.11

exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus

$$\exp x \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \exp x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty.$$

Proposition 5.1.12

- exp est continue sur $\mathbb{R}$.
- exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp' x = \exp x.$$

Proposition 5.1.13

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp x \geqslant 1 + x.$$

Exercices 3

⇨ Montrer que

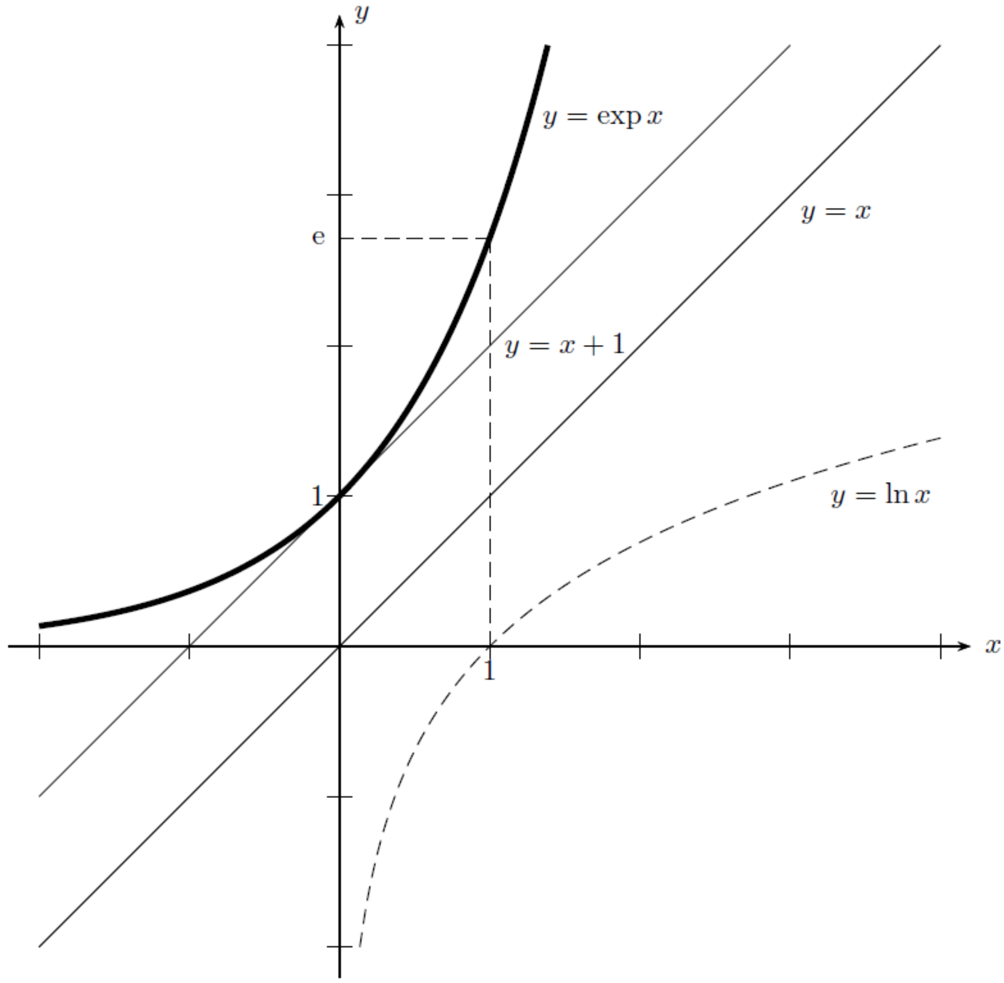
$$\forall x < 1, \quad \exp x \leqslant \frac{1}{1-x}.$$

⇨ Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad 0 < b\exp(-ax) - a\exp(-bx) < b - a.$$

Proposition 5.1.14

$$\frac{\exp x}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty, \qquad x \exp x \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0,$$
$$\frac{\exp(x) - 1}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1.$$



5.1.3 Logarithme et exponentielle en base a

Définition 5.1.4

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. On appelle *logarithme en base a* et on note $\log_a$ la fonction

$$\begin{array}{rccl} \log_a : & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{\ln x}{\ln a}. \end{array}$$

Remarque

⇨ Le logarithme népérien est le logarithme en base e. Si $a = 10$, on obtient le logarithme décimal qui est utilisé en physique (pour définir les décibels) et en chimie (pour définir le pH).

Exercice 4

⇨ Résoudre le système

$$\begin{cases} 2\log_x y + 2\log_y x = -5 \\ xy = \mathrm{e}. \end{cases}$$

Proposition 5.1.15

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Alors

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \quad & \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad & \log_a(1/x) = -\log_a x, \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad & \log_a x^n = n \log_a x. \end{aligned}$$

Définition 5.1.5

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Alors, pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe un unique $x \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\log_a x = y$; on le note $\exp_a y$ et on a

$$\exp_a x = \exp(x \ln a).$$

On définit ainsi la fonction

$$\begin{array}{rccc} \exp_a : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \exp(x \ln a.) \end{array}$$

Remarque

⇨ Lorsque $a = \mathrm{e}$, on retrouve la fonction exponentielle.

5.1.4 Fonction puissance

Définition 5.1.6

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $y \in \mathbb{R}$, on définit x^y par

$$x^y := \exp(y \ln x).$$

Remarques

⇨ En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp x = \mathrm{e}^x$. Plus généralement, si $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp_a(x) = a^x.$$

On utilisera désormais cette notation pour désigner l'exponentielle ainsi que l'exponentielle en base a.

⇨ Afin de dériver une fonction de la forme $f(x) := u(x)^{v(x)}$, il est recommandé de la mettre sous la forme

$$f(x) = e^{v(x)\ln(u(x))}.$$

Exercices 5

⇨ Résoudre l'équation $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^{\,x}$.

⇨ Calculer $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^x)$.

Définition 5.1.7

Soit $a \in \mathbb{R}$. On appelle fonction puissance, la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\begin{array}{rccc} \varphi_a : & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^a. \end{array}$$

Proposition 5.1.16

$$\begin{array}{rrl} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, & x^0 = 1, & \forall a \in \mathbb{R}, \quad 1^a = 1, \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, & \forall a, b \in \mathbb{R}, & x^{a+b} = x^a x^b, \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, & \forall a \in \mathbb{R}, & x^{-a} = 1/x^a, \\ \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, & \forall a \in \mathbb{R}, & (xy)^a = x^a y^a, \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, & \forall a, b \in \mathbb{R}, & (x^a)^b = x^{ab}, \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, & \forall a \in \mathbb{R}, & \ln(x^a) = a \ln x. \end{array}$$

Proposition 5.1.17

Soit $a \in \mathbb{R}$. La fonction $\varphi_a : x \mapsto x^a$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ est

- continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi_a'(x) = a x^{a-1}.$$

Proposition 5.1.18

Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors

$$x^a \xrightarrow[x\to+\infty]{} \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 0 \\ 1 & \text{si } a = 0 \\ 0 & \text{si } a < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad x^a \xrightarrow[x\to 0]{} \begin{cases} 0 & \text{si } a > 0 \\ 1 & \text{si } a = 0 \\ +\infty & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

Remarque

⇨ Si $a > 0$, on définit 0^a en posant $0^a = 0$. La fonction

$$\begin{array}{rccc} \varphi_a : & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^a \end{array}$$

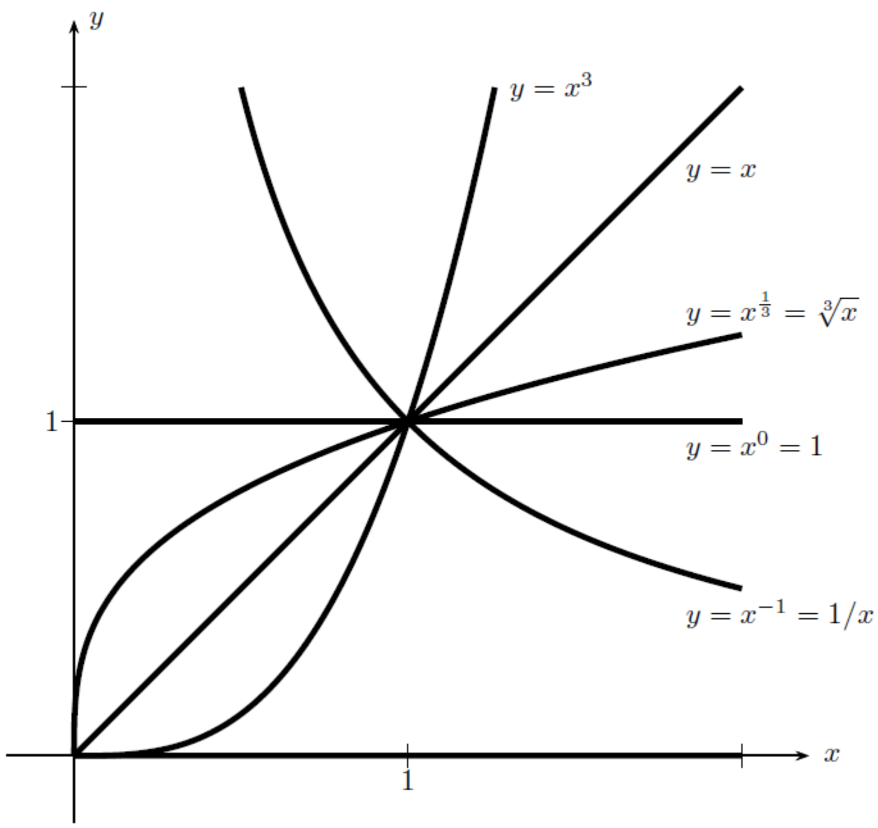
est continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur

— $\mathbb{R}_+$ lorsque $a \geqslant 1$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi_a'(x) = a x^{a-1}.$$

— $\mathbb{R}_+^*$ lorsque $a < 1$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi_a'(x) = a x^{a-1}.$$



5.1.5 Calcul de limite

Proposition 5.1.19: Croissances comparées

Soit $\alpha, \beta > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty, \qquad \frac{x^\alpha}{(\ln x)^\beta} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty,$$

$$x^\alpha (\ln x)^n \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$

Remarques

⇨ Mnémotechniquement, on dit qu'en 0 et en $+\infty$, l'exponentielle l'emporte sur la puissance qui l'emporte sur le logarithme.

⇨ La technique essentielle dans le calcul des limites est la *factorisation par le terme principal* : lorsqu'on fait face à une somme de termes qui tendent vers $\pm\infty$, il est nécessaire de factoriser par le terme qui tend « le plus vite vers l'infini ».

— Pour calculer la limite en $\pm\infty$ des polynômes, il convient de factoriser par le monôme de plus haut degré. Par exemple
$$2x^3 - x^2 + 1 = x^3\left(2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty.$$

— Pour calculer la limite en $\pm\infty$ des fractions rationnelles, il convient de factoriser au numérateur et au dénominateur par le monôme de plus haut degré. Par exemple
$$\frac{x^2+2x-3}{2x^2-1} = \frac{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}{2-\frac{1}{x^2}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{2}.$$

— Pour calculer la limite en $\pm\infty$ des fractions rationnelles en x et en e^x, il convient d'utiliser les croissances comparées en se rappelant que l'exponentielle l'emporte sur les puissances en $-\infty$ et en $+\infty$. Par exemple
$$\mathrm{e}^x - x^5 = \mathrm{e}^x\left(1 - \frac{x^5}{\mathrm{e}^x}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty,$$
$$\frac{\mathrm{e}^{2x} - 2x\mathrm{e}^x}{x^3 + 3\mathrm{e}^{2x}} = \frac{1 - 2\frac{x}{\mathrm{e}^x}}{3 + \frac{x^3}{\mathrm{e}^{2x}}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{3}.$$

— Pour calculer la limite en $+\infty$ ou en 0 des fractions rationnelles en $\ln x, x$ et e^x, il convient d'utiliser les croissances comparées en se rappelant que l'exponentielle l'emporte sur les puissances qui l'emportent sut le logarithme que ce soit en $+\infty$ ou en 0. Par exemple
$$\frac{\mathrm{e}^x\ln x - x^{1000} + \mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x} + \ln x + x} = \frac{1 + \frac{\ln x}{\mathrm{e}^x} - \frac{x^{1000}}{\mathrm{e}^{2x}}}{1 + \frac{\ln x}{\mathrm{e}^{2x}} + \frac{x}{\mathrm{e}^{2x}}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$$
$$\begin{aligned}\frac{x^3\ln x - x^2\ln^2 x}{x + x\ln x} &= -\frac{x^2\ln^2 x}{x\ln x}\cdot\frac{1-\frac{x}{\ln x}}{1+\frac{1}{\ln x}}\\ &= -\left(x\ln x\right)\frac{1-\frac{x}{\ln x}}{1+\frac{1}{\ln x}} \xrightarrow[x\to 0]{} 0.\end{aligned}$$

⇨ Une autre technique importante est la technique du *changement de variable.* Elle se base sur le théorème de composition des limites. Le principe en est le suivant. Étant donné une fonction f définie au voisinage de a, on cherche deux fonctions g et $\bar{u}$ telles que sur ce voisinage
$$f(x) = g(\bar{u}(x)).$$
Si on connait la limite l de $\bar{u}(x)$ lorsque x tend vers a et la limite l' de $g(u)$ lorsque u tend vers l, alors le théorème de composition des limites permet de conclure que $f(x)$ tend vers l' lorsque x tend vers a.

Exercices 6

⇨ Calculer les limites des expressions suivantes.
$$\frac{x^2+2x-3}{2x^2-1} \quad \text{en } -\infty, \qquad \frac{\ln(x^3+1)}{\ln(x)} \quad \text{en } +\infty.$$

⇨ Calculer les limites des expressions suivantes
$$\mathrm{e}^x - x^5 \quad \text{en } +\infty, \qquad \frac{\mathrm{e}^x\ln x - x^{1000} + \mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x} + \ln x + x} \quad \text{en } +\infty.$$

⇨ Calculer les limites suivantes
$$\frac{(\ln x)^2}{\mathrm{e}^x} \quad \text{en } +\infty, \qquad \frac{1}{x}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \quad \text{en } 0, \qquad \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}}{x^2} \quad \text{en } +\infty, \qquad \frac{\mathrm{e}^x}{x^x} \quad \text{en } +\infty.$$

5.2 Fonctions trigonométriques directes et réciproques

5.2.1 Fonctions trigonométriques directes

Proposition 5.2.1

On a
$$\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1.$$

Proposition 5.2.2

Les fonctions sin, cos et tan sont dérivables une infinité de fois sur leur ensemble de définition et
$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad & \sin^{(n)} x = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \\
\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad & \cos^{(n)} x = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \\
\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right), \qquad & \tan' x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.
\end{aligned}$$

Exercices 7

⇨ Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \sin x \leqslant x \quad \text{et} \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \sin x \geqslant \frac{2}{\pi} x.$$

⇨ Calculer la dérivée n-ième de la fonction d'expression $\sin^2 x$.

Remarque

⇨ La première inégalité de l'exercice précédent peut être vue comme une conséquence d'une autre inégalité souvent utilisée :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin x| \leqslant |x|.$$

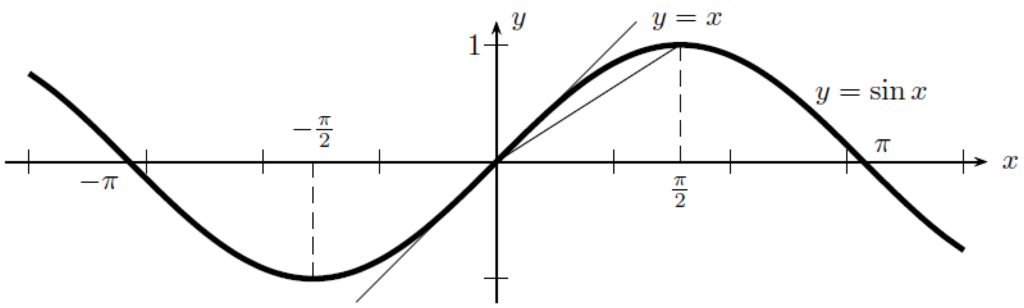
Démonstration. Voyons deux méthodes intéressantes pour la démontrer :

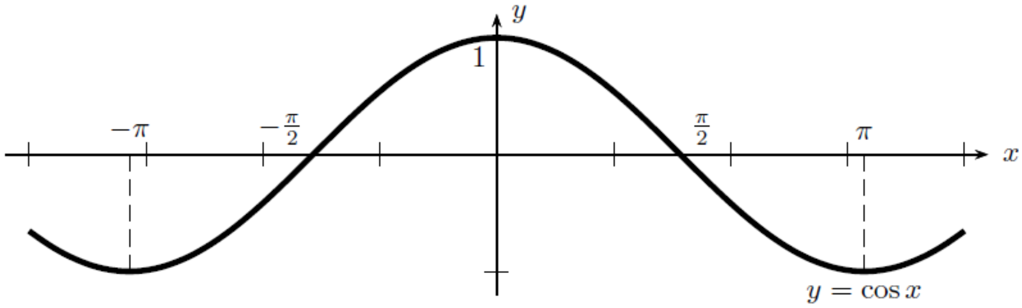
★ **Première méthode** : où l'on utilise l'inégalité précédente.
On admet que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \sin(x) \leqslant x$. On peut le démontrer à l'aide d'une étude de fonctions comme on l'a fait dans l'exercice précédent.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
- Si $|x| \geqslant 1$, on a $|\sin(x)| \leqslant 1 \leqslant |x|$.
- Si $x \in [0, 1]$, $|\sin(x)| = \sin(x) \leqslant x = |x|$, où l'inégalité centrale provient du résultat admis.
- Si $x \in [-1, 0]$, $|\sin(x)| = |-\sin(x)| = |\sin(-x)| \leqslant |-x| = |x|$, où l'inégalité centrale provient du cas précédent, qu'on peut appliquer car $-x \in [0, 1]$.

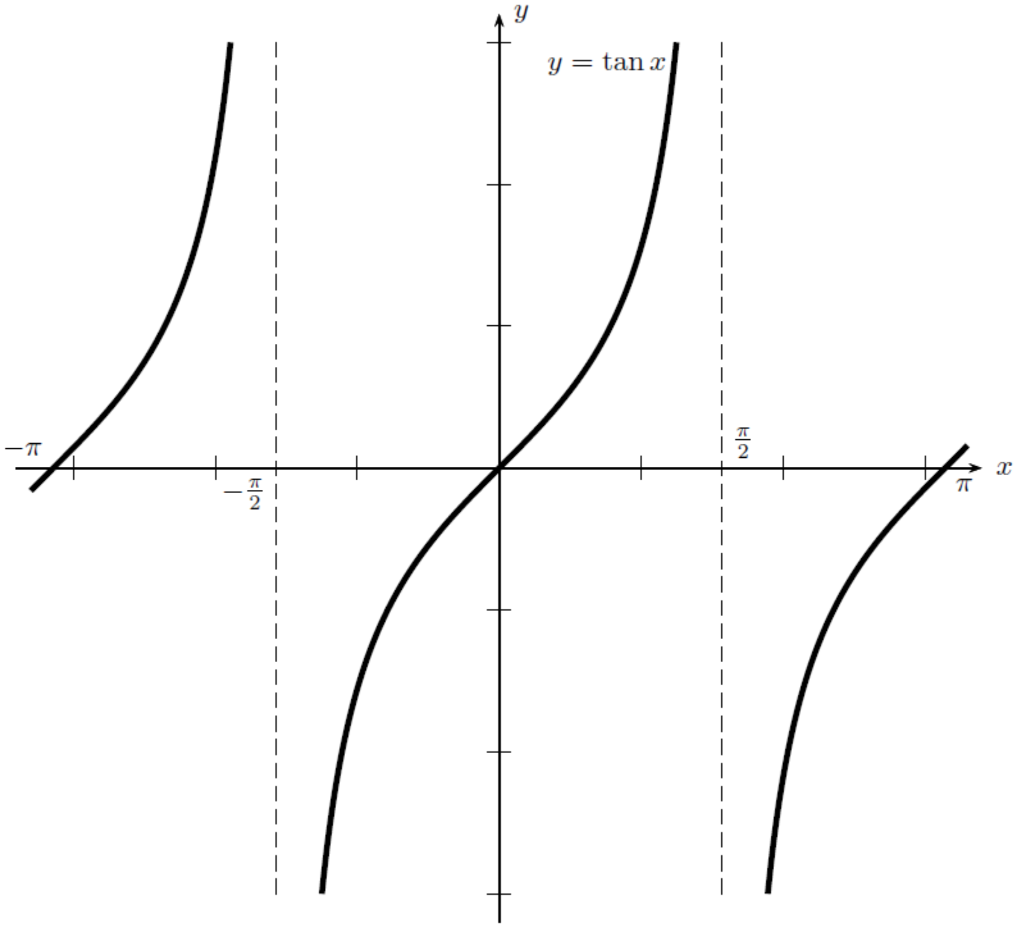
On a bien montré l'inégalité souhaitée dans tous les cas.

★ **Deuxième méthode** : où l'on utilise une intégrale.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$\begin{aligned}
|\sin(x)| &= \left| \int_0^x \cos(t) \mathrm{d}t \right| \\
&\underbrace{\leqslant}_{I.T} \int_{\min(0,x)}^{\max(0,x)} |\cos(t)| \, \mathrm{d}t \\
&\leqslant \int_{\min(0,x)}^{\max(0,x)} 1 \mathrm{d}t \qquad \text{par croissance de l'intégrale} \\
&= \max(0, x) - \min(0, x) = |x|.
\end{aligned}$$

□







5.2.2 **Fonction** Arcsin

Définition 5.2.1

Pour tout $y \in [-1, 1]$, il existe un unique $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ tel que $\sin x = y$; on le note $\operatorname{Arcsin} y$. On définit ainsi la fonction

$$\begin{array}{rccl} \operatorname{Arcsin} : & [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & y & \longmapsto & \operatorname{Arcsin} y. \end{array}$$

Remarques

⇨ Autrement dit, sin réalise une bijection de $[-\pi/2, \pi/2]$ dans $[-1, 1]$ et la corestriction de Arcsin à $[-\pi/2, \pi/2]$ est sa bijection réciproque.

⇨ Par définition de la fonction Arcsin

$$\forall x \in [-1, 1], \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \operatorname{Arcsin} x \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Proposition 5.2.3

$$\begin{aligned} \forall x \in [-1,1], &\qquad \sin(\operatorname{Arcsin} x) = x, \\ \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], &\qquad \operatorname{Arcsin}(\sin x) = x. \end{aligned}$$

Exercice 8

⇨ Calculer

$$\operatorname{Arcsin}(1), \quad \operatorname{Arcsin}\left(\sin\frac{\pi}{7}\right), \quad \operatorname{Arcsin}\left(\sin\frac{5\pi}{7}\right), \quad \operatorname{Arcsin}\left(\cos\frac{\pi}{5}\right).$$

Proposition 5.2.4

Arcsin réalise une bijection de $[-1,1]$ dans $[-\pi/2, \pi/2]$.

Proposition 5.2.5

- Arcsin est strictement croissante sur $[-1,1]$.
- Arcsin est impaire.

Exercice 9

⇨ On pose

$$x := \operatorname{Arcsin}\frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

Calculer $\cos(4x)$ puis en déduire x.

Proposition 5.2.6

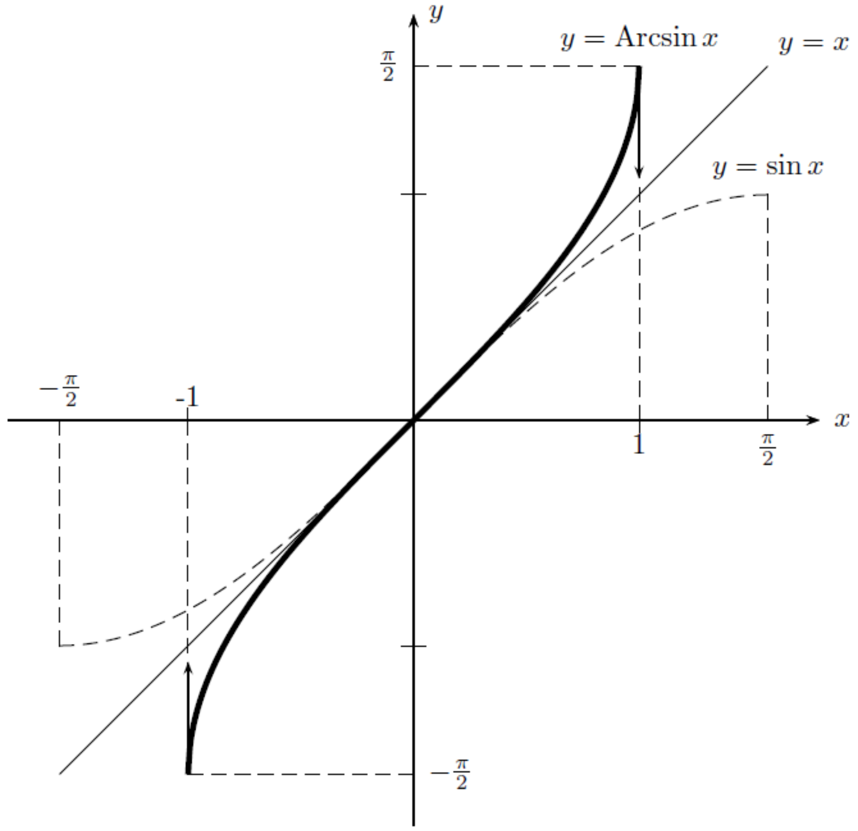
- Arcsin est continue sur $[-1,1]$.
- Arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ et

$$\forall x \in \,]-1,1[, \quad \operatorname{Arcsin}' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Exercice 10

⇨ Montrer que

$$\forall x \in [0,1[, \quad x \leqslant \operatorname{Arcsin} x \leqslant \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$



5.2.3 Fonction Arccos

Définition 5.2.2

Pour tout $y \in [-1,1]$, il existe un unique $x \in [0,\pi]$ tel que $\cos x = y$; on le note $\operatorname{Arccos} y$. On définit ainsi la fonction

$$\begin{array}{rccl} \operatorname{Arccos}: & [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & y & \longmapsto & \operatorname{Arccos} y. \end{array}$$

Remarques

- ⇨ Autrement dit, cos réalise une bijection de $[0,\pi]$ dans $[-1,1]$ et la corestriction de Arccos à $[0,\pi]$ est sa bijection réciproque.
- ⇨ Par définition de la fonction Arccos

$$\forall x \in [-1,1], \quad 0 \leqslant \operatorname{Arccos} x \leqslant \pi.$$

Proposition 5.2.7

$$\begin{aligned} \forall x \in [-1,1], \quad & \cos(\operatorname{Arccos} x) = x, \\ \forall x \in [0,\pi], \quad & \operatorname{Arccos}(\cos x) = x. \end{aligned}$$

Exercices 11

- ⇨ Calculer

$$\operatorname{Arccos}\left(-\frac{1}{2}\right) \quad \text{et} \quad \operatorname{Arccos}\left(\cos\frac{4\pi}{3}\right).$$

- ⇨ Simplifier $\operatorname{Arccos}(\cos x) - \frac{1}{2}\operatorname{Arccos}(\cos(2x))$ pour tout $x \in [0,2\pi]$.
- ⇨ Calculer $\cos(3\operatorname{Arccos} x)$.

Proposition 5.2.8

Arccos réalise une bijection de $[-1,1]$ dans $[0,\pi]$.

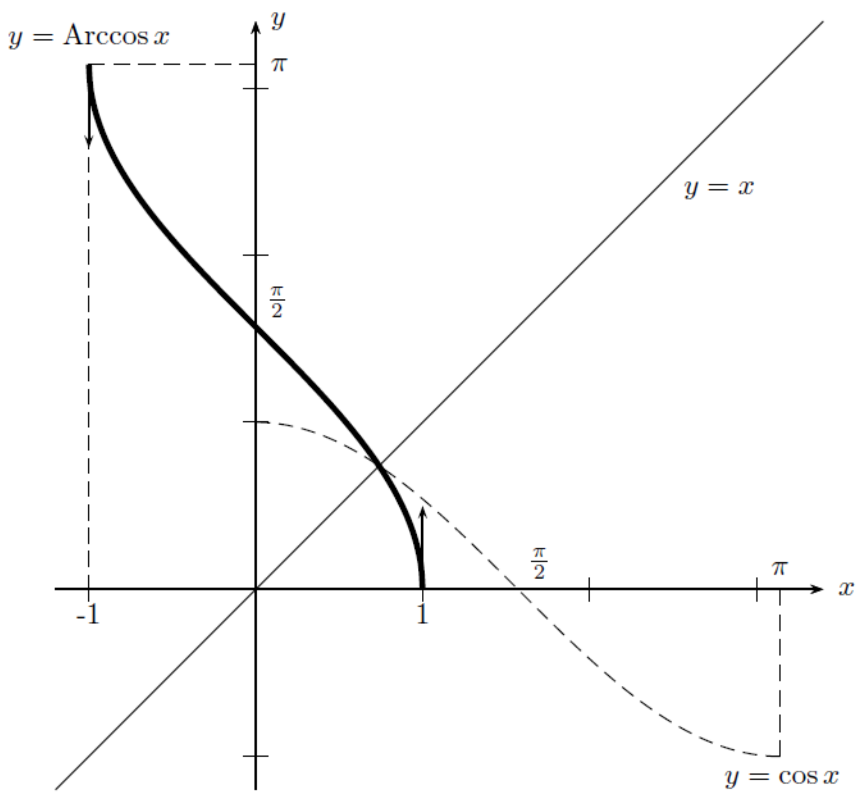
Proposition 5.2.9

Arccos est strictement décroissante sur $[-1,1]$.

Proposition 5.2.10

— Arccos est continue sur $[-1,1]$.
— Arccos est dérivable sur $]-1,1[$ et

$$\forall x \in \left]-1,1\right[, \quad \operatorname{Arccos}' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$



Exercice 12

⇨ À l'aide d'un changement de variable judicieux, déterminer la limite lorsque x tend vers 0 de

$$\frac{\operatorname{Arccos}(1-x)}{\sqrt{x}}.$$

5.2.4 Fonction Arctan

Définition 5.2.3

Pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe un unique $x \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$ tel que $\tan x = y$; on le note $\operatorname{Arctan} y$. On définit ainsi la fonction

$$\operatorname{Arctan} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \operatorname{Arctan} y. \end{array}$$

Remarques

⇨ Autrement dit, tan réalise une bijection de $]-\pi/2, \pi/2[$ dans $\mathbb{R}$ et la corestriction de Arctan à $]-\pi/2, \pi/2[$ est sa bijection réciproque.

⇨ Par définition de la fonction Arctan

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Arctan} x < \frac{\pi}{2}.$$

Proposition 5.2.11

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, &\qquad \tan(\operatorname{Arctan} x) = x, \\ \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, &\qquad \operatorname{Arctan}(\tan x) = x. \end{aligned}$$

Exercices 13

⇨ Calculer $\operatorname{Arctan}\left(\tan \frac{1789\pi}{45}\right)$.

⇨ Le langage de programmation Shadok dispose de la fonction Arctan mais pas de la fonction Arcsin. Définissez cette dernière à partir de la fonction Arctan.

Proposition 5.2.12

Arctan réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-\pi/2, \pi/2[$.

Proposition 5.2.13

— Arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$,

$$\operatorname{Arctan} x \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{Arctan} x \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}.$$

— Arctan est impaire.

Exercice 14

⇨ Résoudre l'équation $\operatorname{Arctan}(2x) + \operatorname{Arctan}(3x) = \frac{\pi}{4}$.

Proposition 5.2.14

— Arctan est continue sur $\mathbb{R}$.
— Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

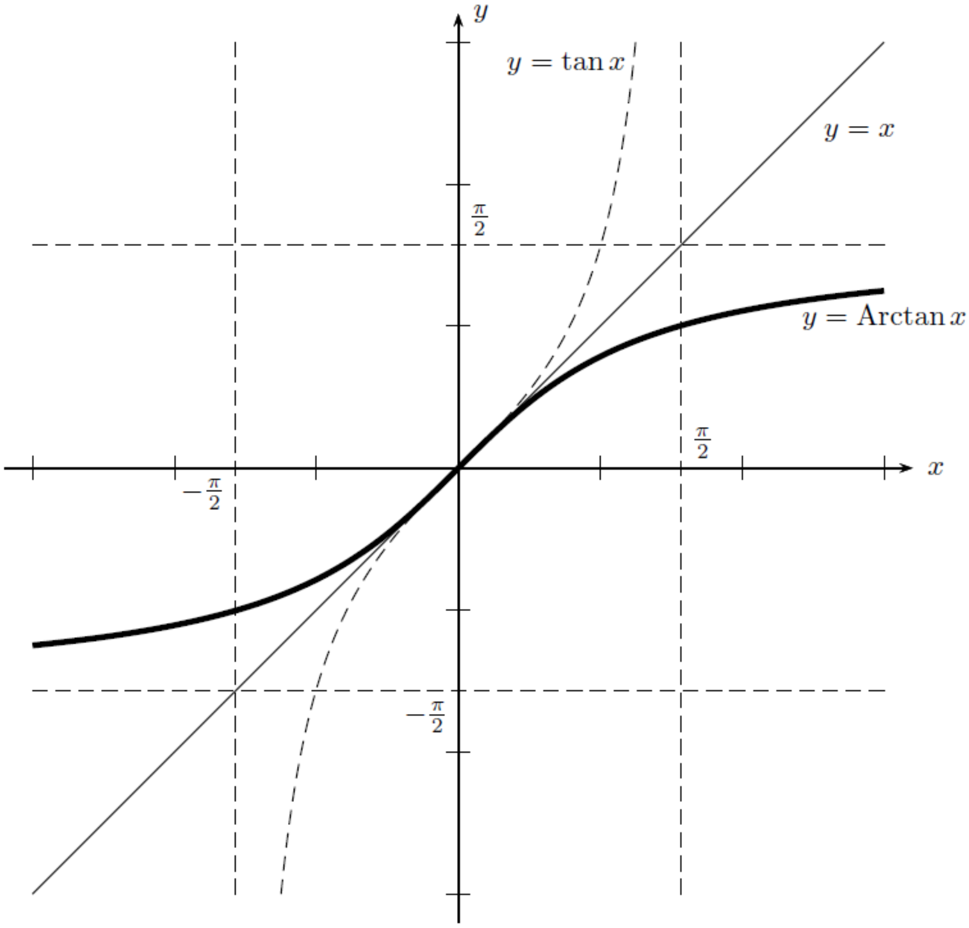
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{Arctan}' x = \frac{1}{1+x^2}.$$

Exercices 15

⇨ Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $\operatorname{Arctan} x \leqslant x$.

⇨ Montrer que

$$\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}.$$



Remarque

⇨ Le calcul de primitive de la forme

$$\int \frac{ax+b}{x^2+\alpha x+\beta}\,\mathrm{d}x$$

où $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $X^2+\alpha X+\beta$ n'a pas de racine réelle se fait de la manière suivante.

$$\begin{aligned}\int \frac{ax+b}{x^2+\alpha x+\beta}\,\mathrm{d}x &= \frac{a}{2}\int \frac{2x+\alpha}{x^2+\alpha x+\beta}\,\mathrm{d}x + \left(b-\frac{a\alpha}{2}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+\alpha x+\beta} \\ &= \frac{a}{2}\ln\left(x^2+\alpha x+\beta\right) + \frac{2b-a\alpha}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+\alpha x+\beta}\end{aligned}$$

Il suffit ensuite de mettre le trinôme (qui rappelons-le n'a pas de racine réelle) sous forme canonique

$$x^2+\alpha x+\beta = \left(x+\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \underbrace{\frac{4\beta-\alpha^2}{4}}_{:=\gamma^2>0} = \gamma^2\left[\left(\frac{2x+\alpha}{2\gamma}\right)^2+1\right]$$

puis de poser $u := (2x+\alpha)/(2\gamma)$.

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+\alpha x+\beta} &= \frac{1}{\gamma^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\left(\frac{2x+\alpha}{2\gamma}\right)^2} \\ &= \frac{1}{\gamma}\int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{1}{\gamma}\operatorname{Arctan} u \\ &= \frac{1}{\gamma}\operatorname{Arctan}\frac{2x+\alpha}{2\gamma}.\end{aligned}$$

En conclusion

$$\int \frac{bx+c}{x^2+\alpha x+\beta}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{2}\ln\left(x^2+\alpha x+\beta\right) + \frac{2b-a\alpha}{2\gamma}\operatorname{Arctan}\frac{2x+\alpha}{2\gamma}.$$

Exercice 16

⇨ Montrer qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad \frac{1}{x^3-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}.$$

Utiliser ce résultat pour calculer

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3-1}.$$

5.2.5 Formules de trigonométrie réciproque

Proposition 5.2.15

$$\begin{aligned} \forall x \in [-1,1], \qquad & \operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{2}, \\ \forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad & \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Exercices 17

⇨ Montrer que

$$\forall x \geqslant 0, \quad \frac{x}{1+x^2} \leqslant \operatorname{Arctan} x \leqslant \frac{\pi}{2} - \frac{x}{1+x^2}.$$

⇨ Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(\operatorname{Arctan} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

⇨ Calculer la dérivée de la fonction d'expression

$$-\frac{x}{2} + \operatorname{Arcsin} \sqrt{\frac{1+\sin x}{2}}.$$

Simplifier cette expression lorsque $x \in \left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

5.3 Fonctions trigonométriques hyperboliques

Définition 5.3.1

On définit les fonctions sh et ch sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch} x := \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{sh} x := \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

Exercice 18

⇨ Résoudre l'équation $7 \operatorname{ch} x + 2 \operatorname{sh} x = 9$.

Proposition 5.3.1

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \qquad & \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = \mathrm{e}^x, \\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad & \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1. \end{aligned}$$

Exercice 19

⇨ Pour tout $x \geqslant 0$, on définit

$$y(x) := \operatorname{Arccos} \frac{1}{\operatorname{ch} x}.$$

Montrer que $y(x) \in [0, \pi/2[$, calculer $1 + \tan^2(y(x))$ puis en déduire une autre expression de $y(x)$.

Proposition 5.3.2

ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}' \, x = \mathrm{sh} \, x \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}' \, x = \mathrm{ch} \, x.$$

Proposition 5.3.3

- ch est paire et sh est impaire.
- On a

$$\mathrm{ch} \, x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty \quad \text{et} \quad \mathrm{ch} \, x \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty,$$
$$\mathrm{sh} \, x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty \quad \text{et} \quad \mathrm{sh} \, x \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty.$$

Remarque

⇨ Si f et g sont deux fonctions respectivement paires et impaires telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^x = f(x) + g(x)$$

alors $f = \mathrm{ch}$ et $g = \mathrm{sh}$. C'est pourquoi on dit que ch est la partie paire de l'exponentielle et que sh est sa partie impaire.

Proposition 5.3.4

- ch est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
- sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch} \, x \geqslant 1$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad [\mathrm{sh} \, x = 0 \iff x = 0] \quad \text{et} \quad [\mathrm{sh} \, x \geqslant 0 \iff x \geqslant 0]$.

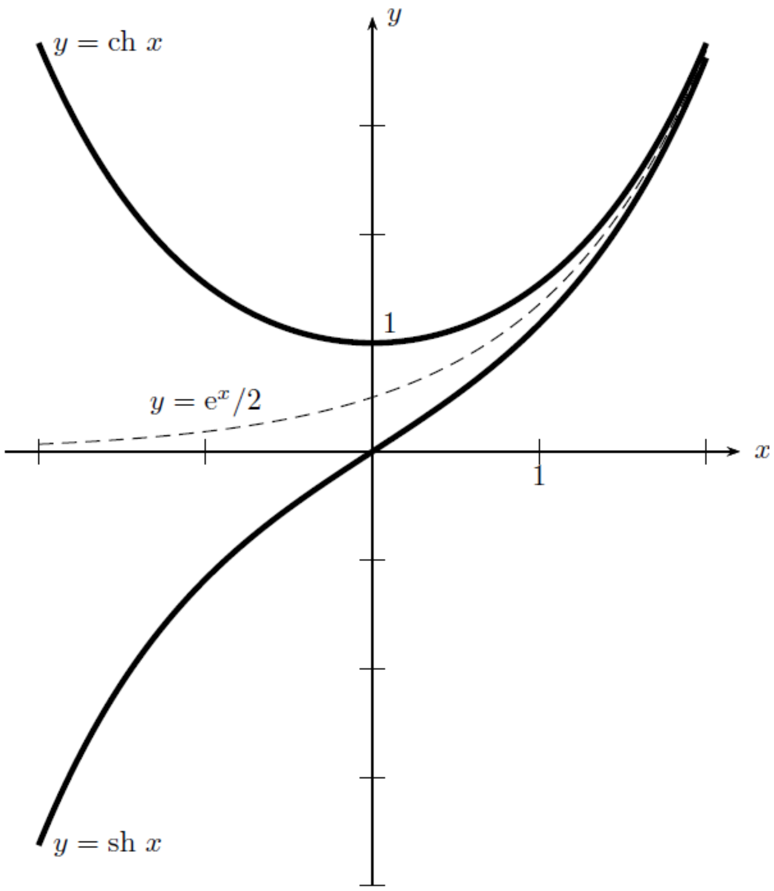
Proposition 5.3.5

- sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- ch n'est pas injective sur $\mathbb{R}$, mais

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch} \, x = \mathrm{ch} \, y \Longrightarrow [x = y \quad \text{ou} \quad x = -y].$$

  En particulier, ch est injective sur $\mathbb{R}_+$.
- ch réalise une surjection de $\mathbb{R}_+$ dans $[1, +\infty[$.

$$\forall y \in [1, +\infty[, \quad \exists x \in \mathbb{R}_+, \quad \mathrm{ch} \, x = y.$$



Remarque

⇨ Le graphe de la fonction cosh est obtenu en laissant pendre une chaîne entre deux points. C'est pourquoi, le graphe de cette fonction est aussi appelé « chaînette ».

Exercice 20

⇨ On appelle Argsh la bijection réciproque de sh. Donner une expression de $\operatorname{Argsh} x$ à l'aide des fonctions usuelles.

Définition 5.3.2

On définit la fonction th sur $\mathbb{R}$

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{th}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}. \end{array}$$

Proposition 5.3.6

th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{th}' x = 1 - \mathrm{th}^2 x = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}.$$

En particulier th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

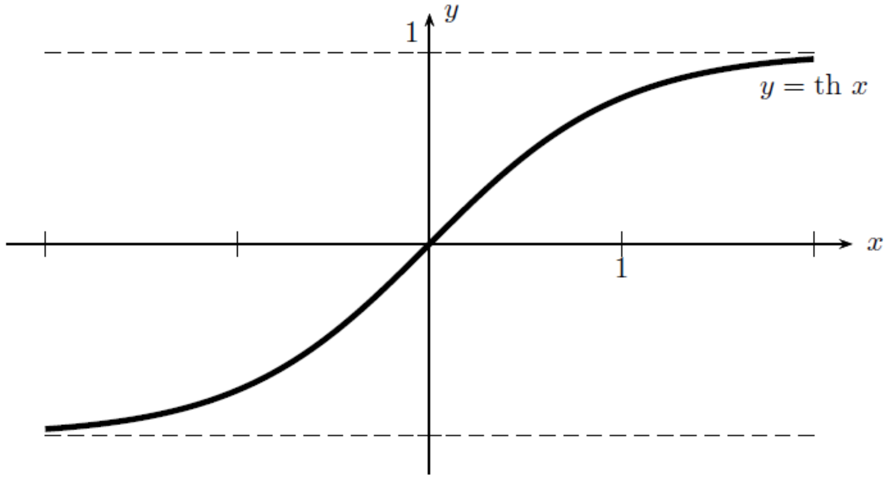
Proposition 5.3.7

— th est impaire.
— On a

$$\mathrm{th}\, x \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1 \quad \text{et} \quad \mathrm{th}\, x \xrightarrow[x \to -\infty]{} -1.$$

Proposition 5.3.8

th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1, 1[$.



Remarque

⇨ La substitution

$$\begin{array}{ccc} \cos & \to & \mathrm{ch} \\ \sin & \to & \mathrm{i}\,\mathrm{sh} \\ \tan & \to & \mathrm{i}\,\mathrm{th} \end{array}$$

transforme une formule de trigonométrie circulaire en une formule de trigonométrie hyperbolique.

Exercice 21

⇨ Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, calculer

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{sh}(kx).$$